SCIENCES MATHÉMATIQUES

Cours d'Analyse Fonctionnelle

Professeur KANGNI Kinvi

Table des matières

Chapitre 1

Espaces linéaires à semi–norme

Sommaire

1.1 Parties remarquables d'un espace linéaire

On désigne par espace linéaire E, un espace vectoriel E sur $\mathbb{C}$.

Par conséquent un sous-espace linéaire de E est un sous-espace vectoriel de E.

On désigne les éléments de E par les lettres $f, g, h, u, v ...,$.

Si $A_1, A_2, ..., A_n, \subset E$ et si $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$, on définit la combinaison linéaire.

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, A_1 = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, f_i \qquad f_i \in A_i \qquad \forall i \right\}$$

► Si $A \subset E$, on appelle l'enveloppe linéaire de A l'ensemble

$$\rangle A \langle = \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, f_i \qquad f_i \in A_i \qquad \alpha_i \in \mathbb{C}, \; n \in \mathbb{N} \right\}$$

On vérifie que $\rangle A \langle$ est un sous-espace linéaire de E ; c'est le plus petit sous-espace linéaire de E contenant A ; c'est aussi l'intersection de tous les sous-espaces linéaire contenant A.

$\rangle A \langle$ est égale au sous-espace linéaire engendré par A.

► $A \subset E$, on dit que A est convexe si :

$$\forall f, g \in A; \quad \alpha, \beta \geq 0 \qquad \alpha + \beta = 1 \Longrightarrow \alpha f + \beta g \in A$$

$$\{\alpha f + \beta g : \alpha + \beta = 1,\, \alpha \geq 0,\, \beta \geq 0\}$$

est le segment d'extrémité f et g.

Théorème 1.1.1. *:* ***Si** A **est convexe** et **si** $\forall f_1\, f_2 ... f_n \in A \quad \alpha_1 ... \alpha_n$*

$$\alpha_1, \alpha_2 ... \alpha_n \geq 0 \quad \textbf{\textit{et}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1 \ \textbf{\textit{alors}} \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \in A$$

Démonstration. Pour $n = 1,$ et $n = 2$,le théorème est vrai par définition de la convexité. Supposons le théorème vrai pour $n - 1$ (jusqu'à l'ordre $n - 1$).

Distinguons deux cas

• $\alpha_n \neq 1$, vu que :

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i, = (1 - \alpha_n) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{1 - \alpha_n} f_i + \alpha_n f_n,$$

par hypothèse de recurrence $\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{1-\alpha_n} f_i \in A$ et puisque $(1 - \alpha_n) + \alpha_n = 1$ on en déduit que

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \in A.$$

• $\alpha_n = 1 \Longrightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{n-1} = 0$

par suite $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = \alpha_n f_n \in A.$ □

► Une partie A de E est dite **absolument convexe** si :

$$\forall\ f, g \in A \qquad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{C} \quad ; |\alpha| + |\beta| \leq 1 \Longrightarrow \alpha f + \beta g \in A.$$

-Il est évident que toute partie absolument convexe est convexe et que tout sous-espace linéaire de E est absolument convexe.

Théorème 1.1.2. ***Si** A **est absolument convexe , il contient tout élément de la forme***

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_{ii} \in \mathbf{A} \ , \ \alpha_i \in \mathbb{C} \qquad \textbf{\textit{et}} \qquad \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = 1.$$

***En particulier toute partie absolument convexe** E **non vide contient** 0.*

Démonstration. ⋆ Par récurrence sur n : $(n = 1, n = 2$ évident)

Supposons la propriété jusqu'à l'ordre $n - 1$,

- Si $|\alpha_n| \neq 1$ alors

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = (1 - |\alpha_n|) \sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{1 - |\alpha_n|} f_i + \alpha_n f_n \in A$$

par hypothèse de recurrence, vu que

$$\sum_{i=1}^{n-1} \frac{\alpha_i}{1-|\alpha_n|} f_i \in A \quad \text{et} \quad 1-|\alpha_n|+|\alpha_n| = 1.$$

- Si $|\alpha_n| = 1$ alors

$|\alpha_1| = |\alpha_2| = |\alpha_{n-1}| = 0$ ce qui implique que $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_{n-1} = 0.$

soit donc

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = \alpha_n f_n \in A.$$

⋆ Vu que A est non vide, soit $f \in A$, alors : $0 = 0.f \in A$, car $|0| < 1$. □

Proposition 1.1.1. *Supposons A est absolument convexe .*

a) -Si $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ alors $|\alpha| \leq |\beta| \Longrightarrow \alpha A \subset \beta A$.

b) - $\forall \alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\right) A.$

c) - Toute intersection quelconque d'ensemble convexe (resp. absolument convexe) est convexe (resp. absolument convexe).

d) - Si $A_1, ..., A_n$ sont convexes (resp absolument convexes), $\alpha_1, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$ alors $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i$ est convexe (resp absolument convexe).

Démonstration. a) Si $\beta = 0 \Longrightarrow \alpha = 0$ c'est évident.

Si $\beta = 0$ vu que :

$$\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| \leq 1, \frac{\alpha}{\beta} f \in A \text{ donc } \alpha f = \beta.\frac{\alpha}{\beta} f \in A\,;\, \forall\, f \in A.$$

b) Si $\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = 0$, c'est évident.

Supposons

$$\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \neq 0, \qquad \forall\, f_1, ...\ f_n \in A.$$

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\right) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|} f_k\right) \in \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\right) .A.$$

Car

$$\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{|\alpha_k|}{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|} = 1 \ \text{ c'est à dire } \ \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|} f_k \in A\right).$$

Inversement

Si

$$f \in \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\right) A \Longrightarrow \exists\, g \in A : f = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\right) g = \left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ e^{-i \arg \alpha_i}\right) g.$$

$$\left(|\alpha| = \alpha\ e^{-i \arg \alpha} \quad \text{car} \quad \alpha = |\alpha|\ \ e^{i \arg \alpha}\right)$$

mais comme

$$\left|e^{-i\arg\alpha_i}\right| = 1,\ e^{-i\arg\alpha_i} g \in A \quad \forall i$$

par suite

$$\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\right) A \subset \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, A \ \text{ car } \ f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \ \ e^{-i\arg\alpha_i} g \in \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, A.$$

□

Remarque 1.1.1. *En générale si A n'est pas absolument convexe cette égalité n'est pas réalisée.*

▶ Soit $A \subset E$, on appelle enveloppe convexe de A , l'ensemble

$$\langle A\rangle = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\,;\ f_i \in A \ \ \alpha_i \geq 0\ :\ \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| = 1\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

$\langle A\rangle$ est convexe, c'est le plus petit ensemble convexe contenant A. C'est aussi l'intersection de tous les ensembles convexes contenant A.

▶ L'enveloppe absolument convexe de A est :

$$\langle\langle A\rangle\rangle = \left\{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\,;\ f_i \in A\ ,\ \alpha_i \in \mathbb{C} \ \ \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq 1\ ,\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

$\langle\langle A\rangle\rangle$ est absolument convexe et c'est le plus petit ensemble absolument convexe contenant A, c'est aussi l'intersection de tous les ensembles absoluments convexes contenant A.

▶ Soient $A, B \subset E$, on dit que A **absorbe** B si :

$$\exists\, \alpha > 0,\ \lambda B \subset A \qquad \forall\, |\lambda| \leq \alpha.$$

Si A est absolument convexe, A **absorbe** $B \Leftrightarrow \exists\, \alpha \neq 0 : \alpha B \subset A$.

En effet

$$\forall\, |\lambda| \leq |\alpha| \Longrightarrow \lambda B = \frac{\lambda}{\alpha}\alpha\, B \subset \frac{\lambda}{\alpha} A \subset A \qquad \left(\left|\frac{\lambda}{\alpha}\right| \leq 1\right).$$

La condition est évidement nécessaire.

$$\exists\, \alpha \neq 0. \qquad \alpha\, B \subset A,\ |\alpha| \leq 1.$$

A est dite **absobante** , si A absorbe tout élément de E :

$$\forall\, f \in E \text{ il existe } \ \alpha > 0, \quad \lambda\, f \subset A, \quad \forall\ |\lambda| < \alpha.$$

Proposition 1.1.2. *Si A est absorbant, A contient* 0 *et on a :*

$$E = \bigcup_{\lambda > 0} \lambda A = \bigcup_{n=1}^{\infty} nA = \rangle A\langle\, .$$

Démonstration. Soit $f \in E$, vu que A est Absorbante, on a

$$\exists\, \alpha > 0.\ \lambda' f \in A,\ \ \forall\, |\lambda'| \leq \alpha,$$

en particulier $\alpha\, f \in A$ soit encore $f \in \frac{1}{\alpha} A$, en posant $\lambda = \dfrac{1}{\alpha}$, on voit que $f \in \lambda A$, ceci étant vrai $\forall\, f \in E$. On en déduit que $E \subset \bigcup\limits_{\lambda > 0} \lambda A$.

Soit

$$\alpha, \lambda > 0,\quad \exists\, n_0 \in \mathbb{N}^* :\ \ \forall\, n \geq n_0 \quad \text{on ait} \quad \frac{\lambda}{n} \leq \alpha.$$

Soit $\lambda > 0$; soit

$$f \in A,\ \exists\, \alpha > 0 : \mu f \in A,\ \ \forall\, |\mu| \leq \alpha,$$

en particulier

$$\exists\, n_0 \in \mathbb{N}^* :\ \ \frac{\lambda}{n} f \in A, \quad \forall\, n \geq n_0 \left(\text{Vu que } \ \frac{\lambda}{n} \leq \alpha,\ n \geq n_0\right)$$

finalement $\lambda\, f \in n\, A,\ \forall\, n \geq n_0$, donc

$$\lambda\, f \in \bigcup_{\lambda > 1}^{\infty} nA,\ \ \forall\, f \in A,\ \ \forall \lambda > 0$$

par suite

$$\bigcup_{\lambda > 0}^{\infty} \lambda A \subset \bigcup_{n > 1}^{\infty} nA.$$

$$\forall\, n \in \mathbb{N} : n \geq 1\ \ nA = \left\{ \sum_{i=1}^{n} .\, f_i\ : f_i \in A \right\} \subset \rangle A \langle$$

donc

$$\bigcup_{n > 1}^{\infty} nA \subset \rangle A \langle$$

il est évident que $\rangle A \langle \subset E$ d'où le théorème. □

Toute intersection finie d'ensembles absorbants est absorbante.
En éffet :$\forall\, f \in E,\quad \exists\, \alpha_i > 0 : \lambda\, f \in A :\quad \forall\, |\lambda| \leq \alpha_i$, soit

$$\alpha = \inf_{1 \leq i \leq n} \alpha_i > 0 \ \text{ et } \ \ \forall\, |\lambda| \leq \alpha, \Longrightarrow |\lambda| \leq \alpha_i,\, \forall_i \Longrightarrow \lambda f \in A_i,\ \forall_i.$$

1.2 Sémi-normes sur un espace linéaire

Définition 1.2.1. *Une* ***semi-norme*** *sur E est une fonction réelle*

$$p : E \longrightarrow \mathbb{R} \quad \text{telle que :}$$

1) - p est en circulairement homogène

$$p\,(\alpha f) = |\alpha|\, p\,(f) \qquad \forall f \in E \qquad \forall \alpha \in E.$$

2) - p est sous-additive :

$$p\,(f + g) \leq p\,(f) + p\,(g) \qquad \forall, fg \in E$$

Remarque 1.2.1. *Une semi-norme telle que* $p(f) = 0 \Longrightarrow f = 0$ *s'appelle une* ***norme*** *sur* E*.*

Proposition 1.2.1. *a) -*

$$p(0) = 0 \text{ et } p(f) \geq 0 \quad \forall f \in E$$

b) -

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \, p(f_i) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C}$$

c) -

$$|p(f) - \beta(g)| \leq p(f-g) \qquad \forall f, g \in E$$

Démonstration. a)

$$p(0) = p(\alpha.0) = |\alpha| \, p(0), \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C} \Longrightarrow p(0) = 0$$

$$0 = p(0) = p(f-f) \leq p(f) + p(-f) = 2p(f) \Longrightarrow p(f) \geq 0.$$

b) pour $n = 1$ la propriété est vraie par définition.

Supposons la vraie pour tous les $k \leq n-1$ et $\alpha_n \neq 0$.

$$p\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i\right) = p\,|\alpha_n| \,.\left(\sum_{n=1}^{n-1} \frac{\alpha_k}{|\alpha_n|} f_k + \alpha_n f_n\right) \leq |\alpha_n| \sum_{i=1}^{n} \frac{|\alpha_k|}{\alpha_n} p(f_k) + |\alpha_n| \, p(f_n).$$

c)

$$\begin{aligned} p(f) &= p(f-g) \leq p(f-g) + p(g) \Longrightarrow p(f) - p(g) \leq p(f-g) \\ p(g) &= p(g-f+f) \leq p(g-f) + p(f) \Longrightarrow p(g) - p(f) \leq p(g-f). \end{aligned}$$

Vu que $p(f) = p(-f)$, $\forall f \in E$ on obtient le résultat demandé. □

Exemples : Soient E un espace linéaire de dimension finie et soit $\{e_1 ... e_n\}$ une base de E.

$\forall f \in E$, f s'ecrit de manière unique comme $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i$.

1) - On peu $p_k\,(\beta = |\alpha_k|)$ pour chaque k , $k \in \{1...n\}$ et les fonctions sont bien définies à cause de l'unité de α_k, les p_k sont des semi-normes sur E.

2) - Soient $\alpha_1 ... \alpha_2 \geq 0$ $p(f) = \sum^{n} |\alpha_k|$ est une semi-norme.

3) -

$$p(f) = \sup_{1 \leq i \leq n} |\alpha_i| \quad , \; p(f) = \sum_{i=1}^{n} |\alpha_k| \; , \; \; p(f) = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)^{1/2}$$

sont des normes sur E, la dernière s'appelle la norme euclidienne associée à la base $\{e_1 ... e_n\}$.

Théorème 1.2.1. *:* *Si* $p_1, ... p_n$ *sont des semi-normes sur* E *,les fonctions*

$$\sup_{1 \leq i \leq n} p_k, \; \sum_{k=1}^{n} p_k, \; \left(\sum_{k=1}^{n} p_i^2\right)^{1/2}$$

sont des semi-normes sur E*.*

Définition 1.2.2. *: Soit p une semi-norme sur E, $f \in E$, $r > 0$.*
On appelle semi-boule fermée de centre f et de rayon r l'ensemble noté

$$B_p(f, 1) = \{g \in E,\ p(f - g) \leq r\}$$

de même on appelle semi-boule ouverte de centre f et de rayon r l'ensemble :

$$B_p(f, r^{\cdot}) = \{g \in E : p(g - f) < r\}$$

► Si $f = 0$ pour simplifier l'écriture, on pose par convention

$$\begin{aligned} B_p(0, r) &= B_p(r) \\ B_p\left(0, r^0\right) &= B_p\left(r^0\right) \end{aligned}$$

Propriété 1.2.1. *a) -*

$$\begin{aligned} B_p(f, r) &= f + B_p(r) \\ B_p\left(f, r^0\right) &= f + B_p\left(r^0\right) \end{aligned}$$

b) -

$$\begin{aligned} B_p(r) &= r\ B_p(1) \\ B_p\left(r^0\right) &= r\ B_p\left(1^0\right) \end{aligned}$$

c) - $B_p(r)$ et $B_p(r^0)$ sont absolument convexes et absorbantes

$$\forall f \in E : \frac{r}{2p(f)} f \in B_p\left(r^0\right),\ \ Si\ \ p(f) \neq 0.$$

Si $p(f) = 0$, c'est évident.

$$\big(p(\lambda f) = 0 \Longrightarrow \lambda f \in B_p(r^0) \subset B_p(r)\big)$$

pour absolument convexe voir l'inégalité triangulaire.
d) - Soit A une partie absolument convexe de E, alors

$$\begin{aligned} B_p(f, r) &\subset A \Longrightarrow B_p(r) \subset A \\ B_p\left(f, r^0\right) &\subset A \Longrightarrow B_p\left(r^0\right) \subset A \\ B_p(f, r)\, A &\Longrightarrow f \pm h \in A,\ \forall h \in B_p(r) \end{aligned}$$

$$\forall h \in B_p(r)\,;\ h = \underbrace{\frac{1}{2}(f + h) - \frac{1}{2}(f - h)}\in A$$

Combinaison linéaire absolument convexe d'élément de A.

Remarque 1.2.2. *: En générale une semi-boule de centre quelconque n'est pas absolument convexe, absorbante.*

Théorème 1.2.2. *Si p et p' sont des semi-normes sur E et si r et r' sont des nombres strictement positifs, les assertions suivantes sont équivalentes.*

1) - $B_p(r^0) \subset B_{p''}(r^{0\prime})$

2) - $B_p(r) \subset B_{p'}(r')$

3) - $p'(f) \leq \frac{r}{r'} p(f) \quad \forall f \in E.$

Démonstration. $i) \Longrightarrow ii)$

Soit

$$f \in B_r(r), p(f) \leq r \Longrightarrow \forall \alpha \in]0,1[, p(\alpha j) < r \Longrightarrow \alpha f \in B_p\left(r^0\right)$$

$$B_p\left(r^0\right) \subset B_{p'}(r') \Longrightarrow p'(\alpha f) < r' \Longrightarrow p'(f) < \frac{r'}{\alpha}, \forall \alpha \in]0,1[$$

en faisant tendre α vers 1 , on a $p'(f) \leq r'$.

$ii) \Longrightarrow iii)$

Soit

$$f \in E, \ \forall \varepsilon > 0 \qquad p\left(\frac{r}{p(f)+\varepsilon} f\right) \leq r \Longrightarrow p'\left(\frac{r}{p(f)+\varepsilon} f\right) \leq r'$$

$$\Longrightarrow p'(f) \leq \frac{r'}{r}\left[p(f)+\varepsilon\right]$$

en faisant tendre ε vers 0 on voit que $p'(f) \leq \frac{r'}{r} p(f)$.

$iii) \Longrightarrow i)$ évident, voir définition. □

Définition 1.2.3. *Soit A une partie absolument convexe de E, on appelle Jauge de A , la fonction p_A définie sur $\rangle A \langle$ par*

$$p_A(f) = \inf\{\lambda > 0, \ f \in \lambda A\}, \ f \in \rangle A \langle .$$

La fonction p_A est bien définie.

En effet

$$f \in \rangle A \langle \Longrightarrow f = \sum_{(i)} \alpha_i f_i \quad , f_i \in A, \alpha_i \in \mathbb{C}$$

($\sum_{(i)} \simeq$ la sommation est sur un ensemble d'indice fini).

$$f \in \sum_{(i)} \alpha_i A = \left(\sum_{(i)} |\alpha_i|\right) A \subset \lambda A, \quad \forall \lambda > \sum_{(i)} |\alpha_i|$$

d'où l'existence de λ.

$$\forall r > p_A(f) \Longrightarrow f \in rA$$

par définition de la borne supérieure ; $\exists \lambda : p_A(f) < \lambda < r$ et $f \in \lambda A$ comme A est absolument convexe :

$$\lambda A \subset rA \Longrightarrow f \in rA.$$

Remarque 1.2.3. *En général p_A n'est pas définie sur E sauf si A est absorbant et $\rangle A \langle = E$.*

Théorème 1.2.3. *Si A est absolument convexe, la jauge de A est une semi-norme sur $\rangle A\langle$ et on a*

$$B_{P_A}(1) \subset A \subset B_{p_A}(1)\,.$$

Démonstration. a) -

$$p_A(\alpha f) = |\alpha|\, p_A(f)\ ,\ \forall\, f \in \rangle A\langle\ ,\quad \forall\, \alpha \in \mathbb{C}.$$

deux cas sont à envisager :

$$\star \quad \alpha = 0 \Longrightarrow \alpha f = 0 \in \lambda A, \quad \forall \lambda > 0$$

$$p_A(\alpha f) = p_A(0) \leq \lambda, \quad \forall \lambda > 0 \Longrightarrow p_A(\alpha f) = 0 = \ |\alpha|\ p_A(f)\,.$$

$$\begin{array}{llll} \star\, \alpha \neq 0 & p_A(\alpha f) & = & \inf\{\mu > 0 : \alpha f \in \mu A\} \\ & & = & \inf\{|\alpha|\,\lambda : \lambda > 0, \alpha f \in |\alpha|\,\lambda A\} \\ & & = & \inf\{|\alpha|\,\lambda : \lambda > 0, \alpha f \in |\alpha|\,\lambda A\} \\ & & = & |\alpha| \inf\{\lambda > 0 : f \in \lambda A\} = |\alpha|\, p_A(f) \end{array}$$

b) -

$$p_A(f+g) \leq p_A(f) + p_A(g)\ ,\ \forall\, f, g \in \rangle A\langle$$

Il suffit de montrer que

$$p_A(f+g) \leq r + s,\ \forall\, r > p_A(f)\,,\ \forall\, s > p_A(g)$$

$$\left.\begin{array}{r} r > p_A(f) \Longrightarrow f \in rA \\ s > p_A(g) \Longrightarrow g \in sA \end{array}\right\} \Longrightarrow f + g \in rA + sA = (r+s)\,A$$

Donc

$$p_A(f+g) \leq r + s$$

par passage à la limite on a

$$p_A(f+g) \leq p(f) + p(g)\,.$$

c) - Si

$$f \in B_{p_A}(i) \Longrightarrow p_A(f) < 1 \Longrightarrow f \in 1.A.$$

Si

$$f \in A,\ \ f \in 1.A :\Longrightarrow p_A(f) \leq 1 \Longrightarrow f \in B_{p_A}(1)\,.$$

□

1.3 Espace linéaire à semi-norme

Définition 1.3.1. *: Soient P et Q deux familles de semi-normes sur E.*

On dit que P est plus fort que Q (en symbole $P > Q$) ou que Q est plus faible que P $(Q < P)$ si

$$\forall\, q \in Q, \quad \exists\, p \in P \text{ et une constante } c > 0 : q \leq cp.$$

Dans la définition précédente quand q varie, p et c varient également.

► On dit que P est équivalent à Q et on écrit $(P \simeq Q)$ si P est à la fois plus faible et plus fort que Q.

On vérifie que $\simeq$ est une relation d'équivalence sur la famille des ensembles de semi-normes sur E.

► Soit P un ensemble de semi-normes sur E. On dit que :

• P est filtrant si

$$\forall\, p_1...p_n \in P. \quad \exists\, p \in P \text{ et } c > 0 \qquad \sup_{1\leq i\leq n} p_i \leq cp$$

c'est dire :

$$p_i \leq cp \quad \forall_i : 1 \leq i \leq n.$$

• P est séparant si :

$$(p\,(f) = 0\ \forall\, p \in P \Longrightarrow f = 0) \Leftrightarrow (\forall\, f \neq 0,\ \exists\, p \in P : p\,(f) \neq 0)\,.$$

• P est un **système de semi-normes** sur E s'il est à la fois filtrant et séparant.

Remarque 1.3.1.
i) Une norme toute seule constitue toujours un système de semi-normes sur E.
ii) Si P est un système de semi-normes sur E et si $P \simeq Q$ alors Q est un système de semi-norme sur E.

Théorème 1.3.1. *Si $P = (p_1, ...p_n)$ est un système fini de semi-norme il est équivalent à un de ces éléments qui est une norme sur E.*

Démonstration. P est filtrant $\Longrightarrow \exists\, p_k \in P$ et $c > 0 : \sup_{1\leq i\leq n} p_i \leq cp_k,$

il suffit de prendre $Q = \{p_k\}$ on voit que $P \simeq Q$.

$$\text{Si } p_k\,(f) = 0 \Rightarrow p_i\,(f) = 0 \qquad \forall_i : 1 \leq i \leq n,$$

comme P est séparant on a $f = 0$. □

Théorème 1.3.2. *Si $P = \{P_n, n \in \mathbb{N}\}$ est un système dénombrable de semi-norme sur E, l'ensemble*

$$Q = \left\{ q_n = \sup_{1\leq i\leq n} p_i, n \in \mathbb{N} \right\}$$

est un système de semi-norme sur E équivalent à P.

Démonstration.

$$\text{Soit } q_n = \sup_{1\leq i\leq n} p_i, \in Q, \quad p_i \in P.$$

Vu que P est filtrant

$$\exists\, p_k \in \{p_1, ..., p_{n,...}\} \qquad q_n = \sup_{1\leq i\leq n} p_i \leq cp_k, \quad p_k \in P, \text{ et } c > 0.$$

Soit

$$p_n \in P, \quad p_n \leq \sup_{1\leq i\leq n} p_i = q_n \in Q.$$

□

Définition 1.3.2. *Un* ***espace linéaire à semi-normes****, est un espace linéaire E muni d'un système de semi-normes P sur E, noté (E,P) où E s'il n'y a pas d'ambiguité.*

▶ (E,P), un espace linéaire à semi-normes est dit normable si P est équivalent à une norme sur E.

On voit que si P est fini, E est normable.

▶ (E,P) est dit métrisable si P est équivalent à système dénombrable de semi-normes sur E.

Remarque 1.3.2. *Si $P \simeq Q$ (sont deux système de semi-normes sur E).*

• *Les notions topologiques introduites relativement à (E,P) et à (E,Q) sont les mêmes.*

• *Un système P de semi-normes sur E définit une topologie sur E, cette topologie coincide avec celle engendrée par une norme si le système P est fini.*

• *Et elle coincide avec celle engendrée par une métrique si P est dénombrable d'ou les terminologie normable et métrisable.*

Convention :

• Si E est normable, on choisira pour P une norme ; si cette norme est fixée on dit que E est normé.

• Si E est métrisable, on choisira une suite de semi-normes telle que :

$p_n \leq p_{n+1}$,

$foralln$.

▶ Soit L un sous-espace linéaire de E, soit p une semi-norme sur E.
La restriction de p à L est une semi-norme.

Si p est un système à L des éléments de P est un système de semi-norme sur L appelé système induit par P sur L.

Si L est un sous espace linéaire d'un espace linéaire à semi-norme (E,P) ,on le munit toujours du système de semi-norme induit par P.

L devient un espace linéaire à semi-normes noté (L,P) ou L si aucune ambiguité n'est possible.

Théorème 1.3.3. *Soit (E,P) un espace linéaire à semi-norme.*

Soit L un sous espace linéaire de dimension finie de (E,P)

Si $(e_1, ...e_n)$ est une base de L alors la système de semi-norme induit par P sur L est équivalent à la norme enclidienne associée à la base $(e_1...e_n)$.

Démonstration.

$$f \in L,\, f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i,\ \|f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^2\right)^{1/2}$$

⋆ P est plus faible que la norme euclidienne sur L.

$$\forall p \in P,\, p(f) = p\left(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i e_i\right) \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\ p(e_i) \leq \left(\sum_{i=1}^{n} p(e_i)^2\right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^{n} p(e_i)^2\right)^{1/2}$$

(inégalité de Schwarz)

$$\forall p \in P,\, p(f) \leq c.\|f\|$$

⋆ $\|\| < P$ sur L.

Soit $f_1 \in L, f_1 \neq 0$, comme P est séparant, $\exists\, p_1 \in P \qquad p_1(f_1) \neq 0$.

Considérons :

$$L_1 = \{f \in L : p_1\ (f) = 0\},$$

L_1 est un sous espace linéaire propre de $L\,(f_1 \notin L_1)$ donc $\dim L_1 \leq n-1$.

Si L_1 est réduit à $\{0\}$ on s'arrête.

Si $L_1 \neq \{0\}$,

$$\text{soit } f_2 \in L_1 : f_2 \neq 0, \quad \exists\, p_2 \in P \qquad p_2(f_2) \neq 0.$$

Considérons :

$$L_2 = \{f \in L_1 : p_2\ (f) = 0\},$$

L_2 est un sous espace propre, $\dim L_2 \leq n-2$.

Après n opérations au plus on obtient des semi-normes $p_1, p_2...p_n \in P$ tels que :

$$L_n = \{f \in L_{n-1} : p_n\ (f) = 0\} = \{0\}.$$

Soit $f \in L$:

$$p_1(f) = p_2(f) = ... = p_n(f) = 0 \Longrightarrow f = 0.$$

Comme P est filtrant, a ces sémi-normes

$$p_1...p_n,\ \exists\, p \in P: \text{ et } c > 0 : \sup_{1 \leq i \leq n} p_i \leq cp.$$

p est une norme sur L plus fort que la norme euclidienne.

Raisonnons par l'absurde, Suppose que p ne soit pas plus fort que $\|\ \|$ sur L.

$$\exists\, f_m \in L : 1 = \|f_m\| \geq mp(f_m),\ \ \forall m,$$

(on peut supposer $\|f_m\| = 1$ sinon, on le remplace par $\dfrac{f_m}{\|f_m\|}$).

Ecrivons $\quad f_m = \sum_{i=1}^n \alpha_{m,i}\ e_i$.

Soit

$$\vec{\alpha}_m = (\alpha_{m,1}\, \alpha_{m,2}...\alpha_{m,n}) \in \mathbb{C}^n.$$

$$\|\vec{\alpha}_m\| = \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_{m,i}|^2\right)^{1/2} = \|f_m\| = 1,\ \ \forall_m.$$

$\vec{\alpha}_m$ est une suite bornée de $\mathbb{C}^n$.

Par le théorème de Bolzano Weierstrass,$(\vec{\alpha}_m)$ contient une sous suite $(\vec{\alpha}_{m'})$ qui converge.

Soit

$$\vec{\alpha} = \lim \vec{\alpha}_{m'} = (\alpha_1, ..., \alpha_n).$$

$$|\vec{\alpha}_{m'} - \vec{\alpha}| = \left(\sum_{i=1}^n |\alpha_{m',i} - \alpha_i|^2\right)^{1/2} \longrightarrow 0,\ m' \longrightarrow \infty.$$

Soit $f \in L,\ f = \displaystyle\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i$

$$\|f\| = |\vec{\alpha}| = \lim_{m'} |\vec{\alpha}_{m'}| = 1\ \ (\|\|\ \text{ est continu})$$

soit
$$\|f_{m'}\| = |\vec{\alpha}_{m'}| \longrightarrow \|f\| \Longrightarrow \|f\| = 1\,(\|f_{m'}\| = 1,\, \forall m)$$
Vu la première partie :
$$|p\,(f_{m'}) - p\,(f)| \leq C\,\|f_{m'} - f\| = C\,|\vec{\alpha}_{m'} - \vec{\alpha}| \longrightarrow 0, m' \longrightarrow \infty\; p\,(f_{m'}) \longrightarrow p\,(f)\,.$$
Vu que
$$p\,(f'_m) \leq \frac{1}{m'} \Longrightarrow \lim_{m'}, p\,(f'_m) = 0 = p\,(f)\,.$$
Comme p est une norme $\Longrightarrow f = 0 \Longrightarrow \vec{\alpha} = 0$.

Ce qui est en contradiction avec le fait que $\|f\| = 1$. □

Corollaire 1.3.1. *Dans un espaces linaire de dimension finie, tous les systèmes de semi-normes sont équivalentes en particulier toutes les normes sont équivalentes.*

1.4 Ouverts et fermés dans un espace linéaire à semi-normes

Soit (E, P) un espace linéaire à semi-normes.

▶ $U \subset E$ est dit ouvert si :
$$\forall f \in U, \exists\, p \in P\,,\; r > 0 \quad B_p\,(f, r) = f + B_p\,(r) \subset U$$
▶ $F \subset U, F$ est dit fermé si $E \diagdown F$ est ouvert.

On montre que F est fermé $\Leftrightarrow$ F contient tout
$$f \in E : F \cap B_p(f, r) \neq \emptyset \quad \forall\, p \in P \textbf{ et}$$
r>0. On va voir si on remplace P par un système équivalent de semi-normes, ces notions changent, on a le résultat suivant.

Théorème 1.4.1. *Deux systèmes équivalents du semi-normes définissent les mêmes ouverts et fermés.*

Démonstration. Soit U un ouvert pour P
$$\forall f \in U, \exists\, p \in P\,; r > 0 : \quad f + B_p\,(r) \subset U$$
$$\exists\, q \in Q \text{ et } c > 0 : p \leq c\,q \Longrightarrow B_q\left(\frac{r}{c}\right) \subset B_p\,(r) \Longrightarrow f + B_q\left(\frac{r}{c}\right) \subset f + B_p\,(r) \subset U.$$
□

Théorème 1.4.2.

- *Toute réunion d'ouverts est ouvert.*
- *Toute intersection finie d'ouverts est ouvert.*

Ce théorème montre que les ouverts ainsi définis déterminent une topologie sur E et (E, P) devient un espace topologique.

Dans toute la suite, sauf mention explicite du contraire, tout espace linéaire à semi-normes est munie de la topologie déterminée par son système de semi-normes.

Exemples :

a) -

$$\forall p \in P\,,\ \forall r > 0\ \ B_p\left(f, r^0\right)\ \text{ et } B_p\left(f, r\right)$$

sont respectivement ouverts et fermés.

- Soit

$$\text{Soit } g \in B_p\left(f, r^0\right) \qquad \forall r' < r - p\left(g - f\right) \qquad B_p\left(g, r'\right) \subset B_p\left(f, r\right)$$

en effet

$$\forall h \in B_p\left(g, r'\right) \qquad p\left(h - f\right) \leq p\left(h - g\right) + p\left(g - f\right) \leq r' + p\left(g - f\right) < r.$$

- Soit

$$g \in E \diagdown B_p\left(f, r\right) \qquad \forall r' < p\left(f - g\right) - r$$

$$B_p\left(g, r'\right) \cap B_p\left(f, r\right) = \phi \Longrightarrow B_p\left(g', r'\right) \subset E \diagdown B_p\left(f, r\right).$$

Les semi-boules $B_p\left(f, r^0\right)$ et $B_p\left(f, r\right)$ constituent une base de voisinage de f.

En conséquence toute semi-norme sur (E, P) est continue sur E

$\forall p \in P, p$ est continue car

$$\left|p\left(g\right) - p\left(f\right)\right| \leq p\left(f - g\right) \leq \varepsilon \text{ si } g \in B_p\left(f, \varepsilon\right).$$

b) - Tout $f \in E$ constitue un fermé, plus généralement

$$\forall f, g \in E \text{ avec } f \neq g \qquad \exists p \in P, r > 0\ \ B_p\left(f, r\right) \cap B_p\left(g, r\right) = \emptyset.$$

$$g - f \neq 0 \quad P \text{ étant séparant} \qquad \exists p \in P \quad p\left(f - g\right) \neq 0$$

Soit $r = \frac{1}{3} p\left(g - f\right).$

$$\forall h \in B_p\left(f, r\right),\ p\left(h - g\right) \geq p\left(h - f\right) - p\left(f - g\right) \geq p\left(f - g\right) - r = 2r.$$

donc $h \notin B_p\left(g, r\right).$

c) - Tout sous espace linéaire a dimension fine de E est fermé.

Plus généralement la somme de 2 sous espaces linéaires de E. L'un F fermé. L'autre L de dimension finie est fermé.

Supposons $L = \rangle\{e\}\langle$ (le reste se fera par recurrence sur n), $e \in E$.

$F + \rangle\{e\}\langle$ est fermé.

$$\star \qquad e \in F, \rangle\{e\}\langle \subset F \Longrightarrow F + \rangle\{e\}\langle = F \text{ fermé.}$$

$$\star \qquad e \notin F \Longrightarrow \exists p \in P, \text{ et } r > 0 : B_p\left(e, r\right) \cap F = \emptyset.$$

$$\forall\ f \in F \qquad \forall \alpha \in \mathbb{C} \qquad p\left(f + \alpha e\right) \geq \left|\alpha\right| r.$$

Si $\alpha = 0$ évident car $p^0\left(f\right) \geq 0 \qquad \forall f \in E.$

Supposons $\alpha \neq 0$.

$$\begin{aligned} p(f+\alpha e) &= p\left(\alpha\left(\frac{f}{\alpha}+e\right)\right) = |\alpha|\,p\left(\frac{f}{\alpha}+e\right) \\ &= |\alpha|\,p\left(-\frac{f}{\alpha}-e\right) \geq |\alpha|\,r. \end{aligned}$$

Si

$$g \in E : B_p(g.r) \cap (F + \rangle\{e\}\langle) \neq \emptyset, \qquad \forall\, p \in P \text{ et } r > 0 \Longrightarrow g \in (F + \rangle\{e\}\langle).$$

Il suffit de prouver que $g - \alpha e \in F$ pour un certain $\alpha \in \mathbb{C}$.

$$p \in P \quad \exists\, f_m \in F, \alpha_n \in \mathbb{C} : \sup\left(p^0; p\right)(g - f_m - \alpha_m e) \longrightarrow 0 \qquad m \longrightarrow \infty$$

en effet P est filtrant

$$\exists\, q \leq M > 0 \qquad \sup\left(p^0, p\right) \leq M\, q.$$

D'autre part comme

$$B_p\left(g, \frac{1}{m}\right) \cap (F + \rangle\{e\}\langle) \neq \phi,\ \exists\, f_m + \alpha_m\, e \in B_p\left(g, \frac{1}{m}\right)$$

par conséquent.

$$\sup\left(p^0, p\right)(g - f_m - \alpha_m\, e) \leq M\ q\,(g - f_m - \alpha_m\, e) \leq \frac{1}{m} \longrightarrow 0, m \longrightarrow \infty.$$

La suite numérique α_m est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ donc converge : vu que

$$\begin{aligned} |\alpha_m - \alpha_n| &\leq \frac{1}{r^0}\, p^0(f_m + \alpha_m\, e - f_n - \alpha_n e) \\ &\leq \frac{1}{r^0} p^0(f_m + \alpha_m\ - g) + \frac{1}{r^0} p^0(g - f_n - \alpha_n e) \longrightarrow 0, n, m \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

Soit $\alpha = \lim\limits_m \alpha_m$, alors α ne dépend pas p et de la suite $f_m + \alpha_m e$.

En effet si p' et $f'_m + \alpha'_m e$ sont telles que

$$\sup\left(p^0, p'\right)(g - f'_m - \alpha'_n e) \longrightarrow 0, m \longrightarrow \infty$$

on a

$$\begin{aligned} |\alpha'_m - \alpha_m| &\leq \frac{1}{r^0} p^0(f'_m + \alpha'_m e - f_m - \alpha_m e) \\ &\leq \frac{1}{r^0} p^0(-g + f'_m + \alpha'_m e) + \frac{1}{r^0} p^0(g - f_m - \alpha_m - \alpha_m e) \longrightarrow 0, m \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

$\forall p \in P$, on peut donc écrire :

$$\begin{aligned} p(g - \alpha e - f_m) &\leq p(g - \alpha_m e - f_m) + p((\alpha_m - \alpha)\, e) \\ &\leq p(g - f_m - \alpha_m e) + |\alpha_m - \alpha|\, p(e) \longrightarrow 0, m \longrightarrow \infty \end{aligned}$$

donc toute boule de centre $g - \alpha e$ rencontre F, donc $g - \alpha e \in F$ car F est fermé.

Définition 1.4.1. *L'adhérence $\bar{A}$ de $A \subset E$ est l'intersection des fermés contenant A.*

$$f \in \bar{A} \Leftrightarrow \forall\, p \in P \qquad \forall\, r > 0 \qquad B_p(f, r) \cap A \neq \phi.$$

L'intérieur $\overset{\circ}{A}$ de $A \subset E$ est la réunion des ouverts contenus dans A.

$$f \in \overset{0}{A} \Leftrightarrow \exists\, p \in P,\, r > 0 : B_p(f, r) \subset A.$$

1.5 Suite, convergentes et suite de Cauchy

Soit (E, P) un espace linéaire à semi-normes
$f_n \in E$ converge vers $f \in E$ ou tend vers $f \in E$ si :

$$\forall V(f)\ ,\exists r \quad / \, \forall n \ > r \quad f_n \in V$$

$$\Leftrightarrow \forall p \in P \quad \forall \varepsilon > 0 \ \ \exists N. \ \ \forall n \geq N \ , \ p(f_n - f) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \forall p \in P, p(f_n - f) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty.$$

Propriété 1.5.1. *a) - La limite d'une suite convergente est unique.*
En effet, soient $f_m \to f, f_m \to g$.

$$\forall p \in P, p(f - g) \leq p(f - f_m) + p(g - f_m) \longrightarrow 0, m \longrightarrow \infty$$

$$\Longrightarrow p(f - g) = 0, \quad \forall p \in P \ \textit{donc } f = g \textit{ car } P \textit{ est séparant.}$$

b) - Toute sous suite d'une suite convergente converge vers la même limite.
c) - Toute combinaison linéaire de suites convergentes converge vers la combinaison linéaire correspondante de ses limites.

Théorème 1.5.1. *Si E est métrisable ,l'adhérence d'une partie A de E est l'ensemble des limites des suites convergentes.*

Démonstration. Soit B l'ensemble de l'énoncé.
Si

$$f \in B, \quad \exists f_m \in A : f_m \longrightarrow f.$$

$\forall m$ tout voisinage de f rencontre A donc $f \in \bar{A}$.
* E étant métrisable donc P est équivalent à un système dénombrable de semi-normes. On peut donc supposer que

$$P = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}, \text{ avec } \ p_n \nearrow .$$

Soit $f \in \bar{A}$,$\forall m$ $B_{p_m}\left(f; \frac{1}{m}\right) \cap A \neq \varnothing$

$$\exists f_m \in B_{p_m}\left(f; \frac{1}{m}\right) \cap A$$

fixons

$$p_n \in P\,, \qquad \forall m \geq n$$

$$p_n(f_m - f) \leq \ p_m(f_m - f) \leq \frac{1}{m} \longrightarrow 0, m \longrightarrow \infty$$

$f_m \in E$ est de Cauchy dans E si

$$\forall \ \ V(0)\,, \ \exists N : \forall r, s \geq N \ \ f_r - f_s \in V \Leftrightarrow \forall p \in P \quad \forall s > 0; \ \exists N; \ \forall r, s \geq N \ \ p(f_s - f_r) \leq \varepsilon.$$

$$\Leftrightarrow \forall p \in P, \ p(f_r - f_s) \longrightarrow 0, \ inf(r, s) \longrightarrow \infty.$$

□

Théorème 1.5.2. *Toute suite convergente dans E est de Cauchy.*
Si f_m est de Cauchy et si une des sous-suites de f_m est convergente, la suite f_m converge vers la même limite.

Démonstration.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall p \in P\ \exists N : \forall r, s \geq N \quad p(f_r - f_s) \leq \varepsilon.$$

Si

$$f_{n_k} \longrightarrow f, \exists M : \forall r \geq M \qquad p(f_{m_k} - f) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\forall m \geq \sup(M, N) \qquad p(f_m - f) \leq p(f_m - f_{m_k}) + p(f_{m_k} - f) \leq \varepsilon.$$

□

Définition 1.5.1. *:*
Une partie A de E est complète si toute suite de Cauchy d'éléments de A converge vers un élément de A.

Exemples :
a) - Si A est complet, tout sous-ensemble fermé de A est complet.
b) - Tout compact de E est complet.
Soit (f_m) une suite de Cauchy dans K, K étant un compact.

$$\exists F \in k : \forall p, r; B_p(f, r)$$

contient une infimité de f_m. (i.e il existe une infimité de $m : f_m \in B_p(f, r)$).
Supposons que toute semi-boule $B_p(f, r)$ ne contienne qu'un nombre fini de f_m.
K étant compact,

$$\exists B_{p_1}(f_1, r_1) ...., B_{p_n}(f_n, r_n) : K \subset \bigcup_{i=1}^{N} B_{p_i}(f_i, r_i).$$

Cela entrainerait que les termes de la suite sont finis, et cela pour toute suite de Cauchy dans E, ce qui est absurde.

$$\forall \varepsilon > 0,\ \forall p \in P,\ \exists N\ \ \forall r, s \geq N \quad p(f_r - f_s) \leq \varepsilon/2$$

$$\exists n \geq N : p(f_n - f) \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

$$p(f_m - f) \leq p(f_m - f_n) + p(f_n - f) \leq \varepsilon.$$

Définition 1.5.2. *: Un espace linéaire à semi-normes est un :*
- espace de Banach s'il est normable et complet.
- espace de Frechet s'il est métrisable et complet.

Tout espace linéaire à semi-norme de dimension finie est un espace de Banach :
Soit $n = \dim E; P$ est équivalent à la norme encludienne associée à une base donnée de E, car tous les systèmes de semi-normes sont équivalentes donc équivalentes à la norme encludienne que constitue à elle seule une système de semi-normes, par conséquent E est normables.
E est complet :

En effet, soit f_m de Cauchy dans E, si $(e_1, ...e_n)$ est une base de E

$$f_m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{mi} e_i; \quad \|f_m - f_n\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_{mi} - \alpha_{ni}|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0, m \longrightarrow \infty.$$

pour chaque i fixé. La suite numérique α_{mi} est de Cauchy dans $\mathbb{C}$ donc converge vers $\alpha_i \in \mathbb{C}$.

soit

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \, e_i \in E$$

$$\|f_m - f\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_{mi} - \alpha_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \longrightarrow 0, m \longrightarrow \infty.$$

Théorème 1.5.3. *: Tout sous espace linéaire de E de Frechet pour le système de semi-norme induit est fermé dans E.*

Démonstration. Soit L le sous-espace en question

$$P \simeq Q = \{q_n : n \in \mathbb{N}\} \text{ sur } L$$

Vu que (E, P) est métrisable.

$$\forall \, n, \quad \exists \, p_n \in P; \; c > 0 : q_n \leq c \; p_n, \text{ sur } L \Longrightarrow \{p_n; n \in \mathbb{N}\} \simeq P \text{ sur } L.$$

Si

$$f \in \bar{L}, \; \exists \, f_m : f_m \in \bigcap_{i=1}^{m} B_{pi} \left(f, \frac{1}{n} \right) \cap L, \text{ vu que } \bigcap_{i=1}^{n} B_{pi} \left(f, \frac{1}{m} \right)$$

contient une intersection fini d'ouverts, $\bigcap_{i=1}^{n} B_{pi} \left(f, \frac{1}{m} \right) \neq \phi$.

f_m est de Cauchy dans L

en effet

$$\forall \, n \, ; \quad \forall \, r, s \geq n$$

$$p_n \left(f_r - f_s \right) \leq p_n \left(f_r - f \right) + p_n \left(f - f_n \right) \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \rightarrow 0, r, s \longrightarrow \infty.$$

L étant complet, la suite $f_m \longrightarrow f_0 \in L$.

Prouvons que $f = f_0$, cela revient à montrer que $f_m \longrightarrow f$ dans E.

Soit

$$p \in P, \; \exists \, n \in N \text{ et } c > 0 : \quad p\left(h \right) \leq c p_n \left(h \right) \; ; \quad \forall \, h \in L$$

$$\forall \, h \in \bar{L}, \; \exists \, h_n \in L : \; \sup \left(p, p_n \right) \left(h_n - h \right) \longrightarrow 0, \;\; n \longrightarrow \infty$$

par continuté la majoration est valable sur l'adhérence de L.

$$p\left(h \right) \leq c_{p_n} \left(h \right) \qquad \forall h \in \bar{L}$$

$$p\left(f_m - f \right) \leq c \, p_n \left(f_m - f \right) \leq \frac{c}{m} \longrightarrow 0, m \longrightarrow \infty.$$

□

1.6 Densité et séparabilité

Soient $A \subset E, \quad D \subset E$.
On dit que D est dense dans A si :

$$\forall f \in A, \quad \forall p \in P \quad \forall r > 0 \qquad B_p(f, r) \cap D \neq \phi \Leftrightarrow A \subset \bar{D}.$$

D n'est pas nécessairement contenu dans A, par exemple $\mathbb{Q}$ et $\mathbb{R} \diagdown \mathbb{Q}$. $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R} \diagdown \mathbb{Q}$, $\mathbb{Q} \subset \mathbb{R} = \overline{\mathbb{R} \diagdown \mathbb{Q}}$.

Théorème 1.6.1 (Théorème de BAIRE)**.** *Dans un espace de Frechet, toute intersection dénombrable d'ouve* *(dans E).*

$U_1, U_2, \ldots\ldots$ denses dans E, $\quad U = \bigcap_{i=1}^{\infty} U_i$ est dense dans E.

Théorème 1.6.2 (Variante du Théorème de BAIRE)**.** *: (obtenu par passage au complémentaire).*

Dans un espace de Frechet, toute réunion dénombrable de fermés d'intérieurs vides est d'intérieur vide.

Démonstration. U est dense dans E si B semi-boule dans E, B rencontre U.
Soit B une semi-boule dans E.
$U_1 \cap \bar{B}$ est non vide, soit $f \in U_1 \cap \bar{B}$.

$$\exists\, p_1 \in P,\ r_1 > 0,\ \text{(on peut supposer } r_1 \leq 1) : \ B_{p_1}(f_1, r_1) \subset U_1 \cap \mathring{\mathrm{B}}$$

$$f_2 \in U_2 \cap B_{p_1}(f_1, r_1)\,,\ \text{non vide.}$$

$$\exists\, p_2 \in P,\ r_2 > 0,\ \text{(on peut supposer } p_2 \geq p_1,\ r_2 < \frac{1}{2}) : \ B_{p_2}(f_2, r_2) \subset U_2 \cap \mathring{\mathrm{B}}_{p1}(f_1, r_1)\,.$$

De proche en proche, on détermine une suite $f_m \in E, p_m \in E, r_m > 0$.

$$p_m \geq p_{m-1},\ r_m < \frac{1}{m};\ B_{p_m}(f_m, r_m) \subset U_m \cap \mathring{\mathrm{B}}_{pn-1}(f_{m-1}, r_{m-1})\,.$$

La suite f_m ainsi construite est de Cauchy.

$$\forall p \in P, \quad \exists n : p \leq p_n \left(p_n^{\nearrow}\right) \ \text{et on a :}$$

dès que :

$$r_1 \geq s \geq n \quad p(f_r - f_s) \leq p_n(f_r - f_s) \leq \frac{1}{s} \longrightarrow 0,\ s \longrightarrow \infty.$$

E étant complet, $\exists f : f_m \longrightarrow f$.
$\forall\, m$, les termes de la suite (f_n) appartiennent à $B_{pm}(f_m, r_m)\, \forall m$.
Comme

$$B_{pm}(f_m, r_m) \ \text{est fermé} \implies f \in B_{pm}(f_m, r_m)\, \forall m$$

donc

$$f \in U_m \forall_m \implies f \in \mathring{\mathrm{B}} \cap \left(\bigcap_{i=1}^{\infty} U_i\right),\ f \in B \cap U \quad, B \cap U \neq \phi.$$

$\square$

Définition 1.6.1. *$A \subset E$, est dite séparable si A contient un sous ensemble dénombrable dense.*

$A \subset E$, est totale dans E si $\rangle A \langle$ est dense dans E.

Propriété 1.6.1. *a) Si A est séparable $\Longrightarrow \bar{A}$, $\rangle A \langle$, $\langle A \rangle$, $\langle\langle A \rangle\rangle$ sont séparables.*

Soit D un sous-ensemble dénombrable dense dans A :

$$A \subset \bar{D} \Longrightarrow \bar{A} \subset \bar{D}, \text{ d'où } \bar{A} \text{ est séparable..}$$

Si D est dense dans A alors $\rangle D \langle$ est dense dans $\rangle A \langle$

Soit

$$B = \left\{ \sum_{(j)} \alpha_j f_j \;\; ; \; f_, \in D, \quad \alpha_j \in \mathbb{Q} + i\mathbb{Q} \right\}; \; B \text{ est dénombrable.}$$

Soit

$$f \in \rangle D \langle \Longrightarrow f = \sum_{(i)} \alpha_i \, f_i.$$

Soit

$$g = \sum_{(i)} \beta_i \, f_i \; ; \;\; \beta_i \in \mathbb{Q} + i\,\mathbb{Q}.$$

$$\forall \, p \in P \quad p\,(g - f) \leq \sum_{(i)} |\alpha_i \beta_i| \;\; p\,(f_i) \leq \varepsilon,$$

si on choisit les β_i assez proche de α_i.

Ce qui est possible car $\mathbf{Q} + i\,\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{C}$.

Toutes boules de centre un élément de $\rangle D \langle$ rencontre B, par suite B est dense dans $\rangle D \langle$, donc B est dense dans $\rangle A \langle$.

b) S'il existe une partie dénombrable et totale dans E alors E est séparable.

En particulier tout espace linéaire de dimension finie est séparable.

Si D est dénombrable : $\Big\rangle \bar{D} \Big\langle = E$.

Vu que l'ensemble des combinaisons linéaires rationnelles de $\rangle D \langle$ est dense dans E, on déduit que E contient une partie dénombrable dense, donc séparable.

c) Si E est métrisable, toute partie d'un ensemble séparable est séparable (le résultat est en général faux si E n'est pas métrisable).

Si A séparable, $B \subset A$ est séparable.

E métrisable, soit $P = \{p_m : m \in \mathbb{N}\}$.

Soit $D = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$, D dense dans A :

Considérons les ensembles non-vides de la forme $D \cap B_{p_m}\left(f_n, \dfrac{1}{k}\right)$..

Soit $f_{m,n,k} \in D \cap B_{p_m}\left(f_n, \dfrac{1}{k}\right)$

$\{f_{m,n,k} : m, n, k \in \mathbb{N}\}$ est dénombrable et dense dans B, contenu dans B.

En effet, soit

$$f \in B \subset A, \;\; \forall k, m, \quad \exists \, f_n \in D : f_m \in B_{p_m}\left(f_n, \frac{1}{k}\right) \Longrightarrow f \in B_{p_m}\left(f_n, \frac{1}{k}\right)$$

$$p_m\,(f - f_{m,n,k}) \leq p_m\,(f - f_n) + p_m\,(f_n - f_{m,n,k}) \leq \frac{1}{k} + \frac{1}{k} = \frac{2}{k} \longrightarrow 0 k \longrightarrow \infty$$

toute semi-boule de centre f rencontre D.

1.7 Bornés ; précompacts et extractables

Définition 1.7.1. *$A \subset E$, est bornée si A est absorbée par tout voisinage de 0 autrement dit :*

$$\forall p \in P,\ \forall r > 0\ ,\ A \text{ est absorbé par } B_p\left(r\right)$$

$$\Leftrightarrow \forall p \in P,\ \ \forall r > 0 \Leftrightarrow \exists \varepsilon > 0 : A \subset \varepsilon B_p\left(r\right) \Leftrightarrow \forall p \in P \sup_{f \in A} p\left(f\right) < +\infty.$$

Propriété 1.7.1. *a) Si $A_1 ... A_n$ sont bornés $\Longrightarrow \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ est borné*

b) Si $A_1 ... A_n$ sont bornés $\alpha_i ... \alpha_n \in \mathbb{C} \Longrightarrow \sum_{i=1}^{n} \alpha_i A_i$ est borné

c) A borné $\Longrightarrow \bar{A},\ \langle\langle A\rangle\rangle,\ \langle A\rangle$ bornés.

Théorème 1.7.1. *Soit q une semi-norme sur E (n'appartient pas nécessairement à P).*

Si une semi-boule $B_q\left(f,r\right)$ est bornée alors q est une norme sur E plus forte que P.

En particulier si une des semi-boules $B_p\left(f,r\right), p \in P$ est bornée alors E est normable.

Démonstration.

$$B_q\left(f,r\right) \ \text{ borné } \Longrightarrow B_q\left(r\right) \text{ est borné}$$

$$\forall p \in P,\quad \sup_{f \in B_q(P)} p\left(f\right) \le c < +\infty,\qquad q\left(f\right) \le r \Longrightarrow p\left(f\right) \le c$$

donc $p \le \dfrac{c}{r} q$, P étant plus faible que q on ne déduite que q est une norme. □

Théorème 1.7.2. *Si A est un borné absolument convexe de E, la jauge p_A de A est une norme sur $\rangle A\langle$ plus fort que le système de semi-norme induit par P sur $\rangle A\langle$. Si de plus A est complet alors $\rangle A\langle$ est un espace de Banach pour p_A et sur $B_{p_A}\left(s\right) = A$.*

Démonstration. A borné $\quad \forall p \in P \quad \sup_{f \in A} p\left(f\right) \le c < +\infty$

$$\forall f \in \rangle A\langle,\quad p_A\left(f\right) < 1 \Longrightarrow f \in A \Longrightarrow p\left(f\right) \le c \Longrightarrow p \le c p_A \ \text{ sur } \ \rangle A\langle\,.$$

Donc p_A est une norme sur $\rangle A\langle$ plus forte que P.

Si A est complet

$$\forall f \in \rangle A\langle,\quad p_A\left(f\right) = 1 \Longrightarrow p_A\left(\alpha f\right) < 1,\ \ \forall \alpha \in \left]0,1\right[\Longrightarrow \alpha f \in A\ \ \forall \alpha$$

donc

$$f = \lim_n \frac{1}{1+\frac{1}{n}} f \in A.$$

Soit f_m une suite de Cauchy dans $\rangle A\langle$ pour p_A.

La suite numérique $p_A\left(f_m\right)$ est bornée

$$\exists\, c : p_A\left(f_m\right) \le c,\ \ \forall m.$$

Soit

$$g_m = \frac{f_m}{c}$$

$$p_A\left(g_m\right) \le 1 \Longrightarrow g_m \in A,\ \forall m$$

g_m est de Cauchy pour p_A

$$\forall\, \varepsilon > 0,\ \exists\, N : \forall\, n, m \geq N \qquad p_A\left(g_n - g_m\right) \leq \varepsilon \Longrightarrow g_m - g_n \in \varepsilon A$$

g_n est ainsi de Cauchy pour P (P étant plus faible que p_A).

Comme A est complet, $\exists\, g \in A : g_m \longrightarrow g$ pour P.

$\forall\, n \geq N$ fixé

$$g - g_n = \lim_m \left(g_m - g_n\right) \in \varepsilon A.$$

$$p_A\left(g - g_n\right) \leq \varepsilon \longrightarrow g_n \longrightarrow g \ \text{ pour } \ p_A.$$

$$\Longrightarrow f_n \longrightarrow f = cg \in \rangle A \langle \quad \text{pour } p_A.$$

□

Définition 1.7.2. *$A \subset E$, est précompact si*

$$\forall\, p \in P \ \ \forall\, r > 0 \ \ \exists\, f_1 ... f_n \in E : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_p\left(f_i, r\right) = \left\{f_1, ... f_n\right\} + B_p\left(r\right).$$

Remarque 1.7.1. *(i) On peut exiger que les $f_i \in A$.*

En effet si $A \subset \{f_1, ... f_n\} + B_p\left(\frac{r}{2}\right)$, il suffit de choisir $g_i \in A \cap \left\{f_i + B_p\left(\frac{r}{2}\right)\right\}$ pour avoir

$$A \subset \left\{g_1, ... g_n\right\} + B_p\left(r\right).$$

(ii) On peut exiger que les $f_i \in D$ où D est dense dans A.

Si

$$A \subset \left\{f_1, ... f_n\right\} + B_p\left(\frac{r}{2}\right),\ f_i \in A$$

il suffit prendre

$$g_i \in D \cap \left\{f_i + B_p\left(\frac{r}{2}\right)\right\}$$

pour obtenir

$$A \subset \left\{g_1, ... g_n\right\} + B_p\left(r\right).$$

Théorème 1.7.3. *Une partie A de E est précompact si et seulement si $\forall p \in P$ et pour toute suite $f_m \in A$, il existe une sous suite f_{n_k}*

$$p\left(f_{m_r} - f_{m_s}\right) \longrightarrow 0 \qquad (r, s) \longrightarrow \infty.$$

Démonstration. - La condition est suffisante.

En effet si A n'est pas précompact

$$\exists\, p \in P, r > 0 : A \subset \left\{f_1, ...\, f_n\right\} + B_p\left(r\right).$$

Soit

$$f_1 \in E : A \subset f_1 + B_p\left(r\right), \exists\, f_2 \in A : p.\left(f_2 - f_1\right) > r$$

$$A \subset \left\{f_1, f_2\right\} + B_p\left(r\right), \qquad \exists\, f_3 \in A : p.\left(f_3 - f_1\right), \qquad \left(f_3 - f_2\right) p > r$$

ainsi de suite ,on construit une suite f_n d'éléments de A telle que

$$p\left(f_m - f_n\right) > r, \qquad \forall\, m \neq n.$$

On ne peut donc par en extraire une sous-suite de Cauchy.

- La condition est nécessaire

  Soit $p \in P$ et $f_n \in A$.

Comme A est précompact

$$A \subset \left\{ g_1^{(1)} ... g_{n1}^{(1)} \right\} + B_p (1) .$$

Une des semi-boules

$$\left\{ g_i^{(1)} + B_p (1) \right\}, \quad \text{soit} \quad g_1 + B_p (1)$$

contient une infinité de f_m.

Soit $f_{m_1} \in g_1 + B_p (1)$ ..

Considérons $A \cap (g_1 + B_p (1))$,un sous ensemble de A donc précompact.

Alors

$$A \cap (g_1 + B_p (1)) \subset \left\{ g_1^{(2)} ... g_{n2}^{(2)} \right\} + B_p \left(\frac{1}{2} \right) .$$

Une des semi-boules $g_i^{(2)} + B_p \left(\frac{1}{2} \right)$, soit $g_2 + B_p \left(\frac{1}{2} \right)$,contient une infinité de f_m, $\exists\, f_{n_2} \in g_1 + B_p \left(\frac{1}{2} \right)$ avec $m_2 > m_1$de proche en proche.

Si les $g_1 ... g_{n-1}$ et $f_{m_1}, \ldots, f_{m_{k-1}}$ sont choisis :

$$A \cap \left[\bigcap_{j=1}^{k-1} g_j + B_p \left(\frac{1}{j} \right) \right] \subset \left\{ g_{m_1}^{(k)} ... g_{n_1}^{(k)} \right\} + B_p \left(\frac{1}{k} \right) \text{ avec } g_i^{(k)} \in A \cap \left[\bigcap_{j=1}^{k-1} \left\{ g_i + B_p \left(\frac{1}{j} \right) \right\} \right] .$$

Une des semi-boules

$$g_i^{(k)} + B_p \left(\frac{1}{k} \right), \quad \text{soit} \quad g_k + B_p \left(\frac{1}{k} \right)$$

contient une infinité de f$_m$;

$$\exists\, f_{m_k} \in g_k + B_p \left(\frac{1}{k} \right) \quad \text{avec} \quad m_k > m_{k-1}.$$

Si $s > r$:

$$p (f_{m_r} - f_{m_s}) \leq p (f_{m_r} - g_r) + p (g_r - g_s) + p (g_s - f_{m_s}) \leq \frac{1}{r} + \frac{1}{r} + \frac{1}{s} \longrightarrow 0, r\, s \longrightarrow \infty$$

la sous-suite f_{m_k} de f_m est de Cauchy dans E pour p. □

Théorème 1.7.4. *Si E est métrisable, une partie A et E est précompact si et seulement si de toute suite $f_m \in A$,on peut extraire une sous-suite de Cauchy.*

Démonstration. La condition est suffisante d'après le théorème précédent.

La condition est nécessaire.

Supposons A précompact.

Soit $P = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$ un système dénombrable de semi-normes sur E.

Soit $f_m \in A$.

à $p_1 : \exists\, f_m^{(1)}$ une sous-suite de f_m de Cauchy pour p_1

à $p_2 : \exists\, f_m^{(2)}$ une sous-suite de $f_m^{(1)}$ de Cauchy pour p_2
à $p_3 : \exists\, f_m^{(3)}$ une sous-suite de $f_m^{(2)}$ de Cauchy pour p_3.

$$\begin{array}{lllllll} p_1 & : & f_1^{(1)}, & f_2^{(1)}, & f_3^{(1)}, \ldots\ldots\ldots\ldots & & \\ p_2 & : & f_1^{(2)}, & f_2^{(2)}, & f_3^{(2)}, & f_4^{(2)}, \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ p_3 & : & f_1^{(3)}, & f_2^{(3)}, & f_3^{(3)}, & f_4^{(3)}, & f_5^{(3)}, \ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_k & : & f_1^{(k)}, & f_2^{(k)}, & f_3^{(k)}, & f_k^{(k)}, & f_{k+1}^{(k)}, \ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}$$

on pose $f_{m_k} = f_k^{(k)}$, c'est une extraction diagonale de $f_m^{(k)}$.

$$f_{m_1} = f_1^{(1)}, \;\; f_{m_2} = f_2^{(k)}, \;\; f_{m_2} = f_3^{(3)}$$

$\forall i, (f_{m_k})_{k\geq i}$ est une sous-suite de la suite $f_m^{(i)}$.

$f_m^{(i)}$ étant de Cauchy pour chaque $p_i \Longrightarrow (f_{m_k})_{k\geq i}$ est une suite de Cauchy pour dans E. □

Exemples :

a) Toute suite de Cauchy dans E est précompact.

En effet

$$\forall p \in P, \;\; \forall\, r > 0 \;\;\; \exists\, M : m, n \geq N \Longrightarrow p\,(f_m - f_n) \leq r$$

en particulier

$$p\,(f_m - f_N) \leq r, \quad \forall\, m \geq N$$

$$\forall\, m \geq N \;\; f_m \in f_n + B_p\,(r)\,.$$

$$\{f_n\} \subset \{f_1,\, f_2 ...,\, f_N\} + B_p\,(r)\,.$$

b) Tout borné de dimension finie de E est précompact.

$A \subset E$ de dimension $< +\infty \Leftrightarrow \rangle A \langle$ est de dimension $< +\infty$.

Soit A, un borné de E.

$$A \subset \rangle\{e_1, \ldots e_n\}\langle = L, \quad e_1 \ldots e_n$$

linéairement independant.

Le système de semi-normes sur L est équivalent à la norme eucludienne sur L.

Soit f_m une suite dans A., A borné.

$\{\|f_m\|\}$ est bornée car

$$\forall_p, \;\exists\, c : p\,(f) \leq c, \quad \forall\, f \in A$$

posons

$$f_m = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{m_i} e_i$$

$$\|f_m\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_{m_i}|^2\right)^{\frac{1}{2}}.$$

$$\vec{\alpha}_m = (\alpha_{m_1}, \alpha_{m_2}. \qquad \alpha_{m_n}) \in \mathbb{C}^n$$

$$\|\vec{\alpha}_m\| = \|f_m\|\,, \quad \vec{\alpha}_m$$

est une suite bornée de $\mathbb{C}^n$, vu le théorème de Bolzano-weierstrass $\vec{\alpha}_m$ contient une sous-suite $\vec{\alpha}_{m'}$ qui converge dans $\mathbb{C}^n$, donc de Cauchy dans $\mathbb{C}^n$.

$f_{m'}$ est correspondante à $\vec{\alpha}_m$ est de Cauchy pour $\|\|$ dans L donc de Cauchy dans E, d'ou A est précompact.

c) Tout compact est précompact :

$$K \subset \bigcup_{h \in k} \{f + B_p(r_i)\} \Longrightarrow K \subset \bigcup_{i=1}^{n} \{f_i + B_p(r'i)\} \subset \{f_1....f_n\} + B_p.$$

Propriété 1.7.2.

a) - **Toute union finie de précompacts est précompacte.**
Si

$$A_i \subset \left\{f_1^{(i)},\ f_2^{(i)},\ f_{n_i}^{(i)}\right\} + B_p\left(\frac{\varepsilon}{\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i|}\right)$$

alors

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i\ A_i \subset \sum_{i=1}^{n} e_i \left\{f_1^{(i)}, \qquad f_{n_i}^{(i)}\right\} + B_p(\varepsilon).$$

c) - A **précompact** $\Longrightarrow \bar{A},\ \langle\langle A\rangle\rangle,\ \ \langle A\rangle$ **sont précompact ; pour** $\bar{A}$ c'est évident car

$$A \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_p(f_i, r)$$

qui est fermé réunion finie de fermés

donc

$$\bar{A} \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_p(f_i, r),$$

car il est le plus petit fermé contenant : $\langle\langle A\rangle\rangle$ est précompact ?

$$\forall p \in f,\ \forall r > 0,\ \ \exists\ f_1...f_n : A \subset \{f_1, \qquad f_n\} + B_p\left(\frac{r}{2}\right)$$

$\langle\langle f_1, \qquad f_n\rangle\rangle$ est un borné de dimension finie donc précompact.

En effet :

$$f \in \langle\langle f_1....\ f_n\rangle\rangle.$$

$$f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i\, f_i \qquad \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \leq 1.$$

$$p(f) \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|\ \ p\ (f_i) \leq \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \sup_{i \leq i \leq n} p(f_i) \leq \sup_{i \leq i \leq n} p(f_i) = C.$$

$\exists\, g_1\ \ g_n$ tel que

$$\langle\langle f_1, \qquad f_n\rangle\rangle \subset \{g_1, \qquad g_n\} + B_p\left(\frac{r}{2}\right) \Longrightarrow \langle\langle fA\rangle\rangle \subset \{g_1, \qquad g_n\} + B_p(r).$$

c) **- Tout précompact est borné**

(La réciproque n'est en général pas vraie sauf si A est de dimension finie)

$$\forall\, p \in P,\ \exists\, f_1, ...f_n : A \subset \{f_1, ..., f_n\} + B_p\,(1)$$

$$\forall\, f \in A,\ \exists\, f_i : f \in f_i + B_p\,(1) \Longrightarrow p\,(f) \leq p\,(f_i) + 1 \qquad (p\,(f) - p\,(f_i) \leq p\,(f - f_i) \leq 1)$$

$$\forall\, f \in A,\ p\,(f) \leq \sup_{i \leq i \leq n} p\,(\,f_i) + 1 = C.$$

d) - **Si E est métrisable, A compact $\Longrightarrow$ A séparable.**
(Si E n'est pas métrisable, c'est en général faux).
Soit

$$P = \{p_n : n \in \mathbb{N}\}$$

$$\forall\, m, n, \quad \exists\, F_{m,n} \subset A : A \subset F_{m,n} + B_{p_n}\left(\frac{1}{m}\right)$$

posons $D = \bigcup_{m,n} F_{m,n}$, D est dénombrable et $D \subset A$.
D est dense dans A.
En effet :

$$\forall\, p_n,\ \forall\, r > 0 \qquad \exists m : \frac{1}{m} \leq r.$$

Si

$$f \in A,\ \exists\, g \in F_{m,n} : f \in g + B_{p_n}\left(\frac{1}{m}\right) \Longrightarrow g \in f + B_{p_n}\left(\frac{1}{m}\right).$$

Théorème 1.7.5. *Si une des semi-boule $B_p\,(f, r)$ avec $p \in P$ est précompact, alors l'espace E est de dimension finie.*

Le théorème dit que les espaces de dimension finie sont les seuls espaces à avoir des système de voisinages précompacts.

Démonstration. Il suffit de montrer que

$$\exists\, f_1 \qquad f_n \in E : E \subset \rangle f_1 ... f_n \langle\, .$$

$$B_p\,(f, r)\ \text{ précompact } \Longrightarrow B_p\,(1) = \frac{1}{r}\,[f - B_p\,(f, r)]\ \text{ est précompact}$$

donc borné, Vu un théorème antérieur $\{p\}$est une norme $\simeq$ à P.
Soit

$$\varepsilon \in\,]0, 1[\,, \quad \exists\, f_1 \qquad f_n \in E : B_p\,(1) \subset \{f_1 \qquad f_n\} + \varepsilon\, B_p\,(1)$$

$$\forall\, f \in B_p\,(1) \qquad f = f_{i_1} + \varepsilon_{g_i}, \quad f_{i_1} \in \{f_1 \qquad f_n\}\,,\ g_1 \in B_p\,(1)$$

$$g_1 \in B_p\,(1)\,, \quad \exists\, f_{i_2}, g_2 : g_1 = f_{i_2} + \varepsilon_{g_2} \text{ avec } f_{i_2} \in \{f_1 \qquad f_n\}\,, g_2 \in B_p\,(1)$$

donc $f = f_{i_1} + \varepsilon\, f_{i_2} + \varepsilon^2_{g_2}$.On obtient ainsi une suite

$$f_{i_k} :\ i_k \in \{1, 2...n\}\,, g_k \in B_p\,(1)$$

finalement

$$f = f_{i_1} + \varepsilon\, f_{i_2} + \varepsilon^2 f_{i_3} + ... + \varepsilon^{m-1} f_{i_m} + \varepsilon^m g_m,\ \forall\, m.$$

$$f - \sum_{k=1}^{m} \varepsilon^{k-1} f_{i_k} = 2^m g_m$$

$$p\left(f-\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^{k-1}f_{i_k}\right)=\varepsilon^{m}p\left(g_m\right)\leq\varepsilon^{m}\longrightarrow 0,m\longrightarrow\infty$$

donc

$$\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^{k-1}f_{i_k}\longrightarrow f \text{ dans } E.$$

$$\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^{k-1}f_{i_k}\in\rangle f_1...f_n\langle\,,\forall m$$

$$\Longrightarrow\lim_{m}\sum_{k=1}^{m}\varepsilon^{k-1}f_{i_k}=f\in\rangle f_1,...f_n\langle = \text{ fermé (Vu un théorème antérieur).}$$

Comme :

$$\rangle B_p\left(1\right)\langle = E\Longrightarrow E\subset\rangle f_1...f_n\langle \text{ soit } E=\rangle f_1...f_n\langle\,.$$

□

Définition 1.7.3. *Soit $A\subset E$, on dit que A est extractable si de toute suite $f_m\in A$,on peut extraire une sous-suite f_{m_k}qui converge vers un élément de A.*

Propriété 1.7.3.

a) - **Toute réunion finie d'extractables est extractable (ce n'est pas vrai si la réunion n'est pas finie).**

Soit $f_m\in\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$, les A_i sont en nombre fini donc il existe i_0 tel que A_{i_0} contient les f_m pour une infinité de m, donc une sous-suite $f_{m'}$ de f_m :, A_{i_0} étant extractable on peut extraire une sous-suite $f_{m''}$ de f'_m : qui converge vers un élément de A_{i_0} donc de $\bigcup\limits_{i=1}^{n}A_i$.

b) - $A_i,i\in I$ **extractable** $\Rightarrow\cap A_i$ **est extractable.**

Soit $f_m\in\bigcup\limits_{i\in I}^{n}A_i$ alors $\forall_{i_0}$ fixé dans $I f_m\in A_{i_0}$.

Commr A_{i_0} est exctractable, il contient une sous-suite f_{m_k} qui converge vers $f\in A_{i_0}$.

$$\forall i,\ f_{m_k}\in A_i\Longrightarrow\exists\, f_{m_{k_j}}\text{de }\ f_{m_k}\longrightarrow\ \text{dans } A_i\Longrightarrow f_{m_{k_j}}\longrightarrow f\Longrightarrow f\in A_{i_0}.$$

c) - **Si** $A_i...A_n$ **sont exctractable,** $\alpha_1...\alpha_n\in$ **C alors** $\sum_i^n\alpha_iA_i$ **est extractable.**, il suffit de prouver que si

$$A,B \text{ extractables }\Longrightarrow\alpha A+B \text{ est extractable}, \forall\,\alpha\in\mathbb{C}.$$

Soit

$$f_m\in\alpha A+B\Longrightarrow f_m=\alpha_{g_m}+h_m,g_m\in A,h_m\in B$$

de g_m, on peut extraire une sous-suite $g'_m\longrightarrow g\in A$.

Considérons la sous-suite h'_m correspondant à g'_m, on peut extraire une sous-suite h''_m qui converge vers $h\in B$, à h''_m on considère la sous-suite $g_{m''}$ correspondante, $g''_m\longrightarrow g$.

Considérons

$$f''_m=\alpha g_{m''}+h_{m''}\longrightarrow\alpha\,g+h\in\alpha\,A+B.$$

d) **-** A **extractable** $\simeq A$ **précompact et complet.**

$$f_m \in A; \{f_{m_k}\} \text{ contient } \{f_{m_k}\} \longrightarrow f \in A$$

en particulier $\{f_{m_k}\}$ est de Cauchy donc, A est précompact.

Si f_m est de Cauchy,

$$\exists\, f_{m_k} \longrightarrow f \in A \Longrightarrow f_m \longrightarrow f \in A.$$

Théorème 1.7.6. *Si E est métrisable, on a*
A compact $\Leftrightarrow$ A extractable $\Leftrightarrow$ A pécompact complet.

Démonstration. On sait que A compact $\Longrightarrow A$ précompact complet
A extractable $\Longrightarrow A$ précompact complet.

Il reste à prouver que : A précompact $\Longrightarrow A$ extractable et complet.

· A précompact complet $\Longrightarrow A$ extractable ?

$f_m \in A, \Longrightarrow \exists\, f_{m_k}$ de Cauchy donc converge vers $f \in A$.

· A précompact complet $\Longrightarrow A$ complet ?

Raisonnons par l'absurde, supposons A non compact : $\Longrightarrow \exists$ un recouvrement ouvert $\{\Omega_i\}_{i\in I}$ de A dont on ne peut extraire aucun recouvrement fini.

$$\forall\, J \text{ fini, } J \subset I \qquad A - \bigcup_{i\in J} \Omega_i \neq \phi.$$

Soit

$$P = \{p_n : n \in \mathbb{N} \quad p_n \leq p_{n+1}\}$$

le système de sémi-normes sur E.

A étant précompact,

$$\exists\, f_1^{(1)}, \qquad f_{n_1}^{(1)} \in A :$$

$$A \subset \left\{f_1^{(1)}, \qquad f_{n_1}^{(1)}\right\} + B_{p_1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

ne peut être recouvert par un nombre fini de Ω_i.

C'est à dire

$$\left[A \cap f_1 + B_{p_1}\left(\frac{1}{2}\right)\right] \setminus \bigcup_{i\in J} \Omega_i \neq \phi, \quad \forall\, J \text{ fini } \subset I.$$

$$A \cap f_1 + B_{p_1}\left(\frac{1}{2}\right) \text{ étant précompact}$$

par le même raisonnement

$$\exists\, f_2 \in A \cap \left[f_1 + B_{p_1}\left(\frac{1}{2}\right)\right] :$$

$$A \cap \left[f_1 + B_{p_1}\left(\frac{1}{2}\right)\right] \cap \left[f_2 + B_{p_2}\left(\frac{1}{2^2}\right)\right] \setminus \bigcup_{i\in J} \Omega_i \neq \phi, \quad \forall\, J \text{ fini } \subset I.$$

De proche en proche, on détermine une suite $f_m \in A$:

$$f_{m+1} \in f_m + B_{p_m}\frac{1}{2} \;\text{ et }\; A \cap \left[f_1 + B_{p_1}\left(\frac{1}{2}\right)\right] \cap \left[f_2 + B_{p_2}\left(\frac{1}{2}\right)\right] \cap ... \cap \left[f_m + B_{p_m}\left(\frac{1}{2^m}\right)\right]$$

ne peut être recouvert par un nombre fini de Ω_i,

en particulier,

$$\left[f_m + B_{p_m}\left(\frac{1}{2^m}\right)\right] \setminus \bigcup_{i \in J} \Omega_i \neq 0, \quad \forall J \text{ fini } \subset I.$$

La suite f_m ainsi construite est de Cauchy :

En effet :

$$\forall m, \quad \forall r \geq s \geq m.$$

$$\begin{aligned} p_m(f_r - f_s) &\leq p_m(f_r - f_{r-1}) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + p_m(f_{s-1} - f_s) \\ &\leq p_r(f_r - f_{r-1}) + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + p_{s-1}(f_{s-1} - f_s) \\ &\leq \frac{1}{2^r} + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{2^{s-1}} \longrightarrow 0, r, s \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

A étant complet,

$$\exists\, f \in A : f_m \longrightarrow f.$$

$$f \in A \Longrightarrow \exists\, i_0 \in I : f \in \Omega_{i_0}.$$

Ω_{i_0} étant ouvert,

$$\exists\, p_{n_0}, r_0 > 0 : f + B_{p_{n_0}}(r_0) \subset \Omega_{i_0}.$$

$\forall m$ assez grand on a :

$$f_m \in f + B_{p_{n_0}}\left(\frac{r_0}{2}\right) \quad (f_m \longrightarrow f)$$

et

$$B_{p_m}\left(\frac{1}{2^m}\right) \subset B_{p_{n_0}}\left(\frac{r_0}{2}\right),$$

c'est à dire dès que $\dfrac{1}{2^m} \leq \dfrac{r_0}{2}$ et on a :

$$\underbrace{\underbrace{f_m} + B_{p_m}\left(\frac{1}{2^m}\right) \subset \underbrace{f + B_{p_{n_0}}\left(\frac{r_0}{2}\right)}}_{\in} = f + B_{p_{n_0}}(r_0) \subset \Omega_{i_0}.$$

Ce qui contredit le fait les $f_m + B_{p_m}\left(\frac{1}{2^m}\right)$ ne peuvent pas être reconverts par un nombre fini des Ω_i.

Donc A est compact. □

1.8 Produit fini d'espaces linéaires à semi-normes

Soient

$$(E_1, P_1), \ (E_2, P_2), \ldots, (E_n, \ P_n)$$

espaces linéaires à semi-normes.

On appelle produit des espaces linéaires (E_i, P_i) à sémi-norme, l'espace linéaire $\prod_{i=1}^{n} E_i$ muni du système de semi-normes défini par :

$$f = (f_i, \ldots, f_n) \in \prod_{i=1}^{n} E_i \ ; p \in P.$$

$$p(f) = \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(f_i), \ p_i \in P_i$$

on vérifie aisément que l'on a un système de semi-normes.

$$p(\alpha f) \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(\alpha f_i) = |\alpha| = \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(f_i) = |\alpha| \ \ p(f)$$

Vu que

$$p_i(f_i) \leq \sup_{1 \leq i \leq n} p_j(f_j)$$

on a :

$$p(f+g) = \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(f_i + g_i) \leq \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(f_i) + \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(g_i) = p(f) + p(g).$$

Soit

$$p^1, \ldots\ldots\ldots. p^r \in P$$

$$p^j(f) = \sup_{1 \leq i \leq n} p_i^j(f_i), \quad p_i^j \in P_i, \qquad \forall_j = 1, 2 \ldots r.$$

$$\forall i, \quad \exists \, c_i \ ; \ \exists \ q_i : \sup_{1 \leq i \leq r} p_i^j \leq c_i q_i.$$

Soit

$$C = \sup_{1 \leq i \leq n} c_i, \quad q = \sup_{1 \leq i \leq n} q_i$$

$$\sup_{1 \leq i \leq r} p^j \leq c \ q,$$

donc P est filtrant.

Si

$$p(f) = 0 \quad \forall \, p \in P \Longrightarrow \sup_{1 \leq i \leq n} p_i(f_i) = 0, \quad \forall \, p_i \in P_i \qquad p_i(f_i) = 0 \Longrightarrow f_i = 0, \forall i,$$

soit $f = 0$, le système est séparant.

Notons aussi que ce système de semi-normes est équivalent aux systèmes.

$$P' \quad : \quad p'(f) = \sum_{i=1}^{n} p_i(f_i), \ p_i \in P_i, \ \ p' \in P'$$

$$P'' \quad : \quad p''(f) = \left(\sum^{n} p_i^2(f_i) \right)^{\frac{1}{2}}, \ p_i \in P_i, \ \ p'' \in P''.$$

Théorème 1.8.1. *Une partie U de $\prod\limits_{i=1} E_i$ est ouvert pour la topologie définie par son système de semi-normes P si et seulement si elle est réunion de partie de la forme $\prod\limits_{i=1} U_i$, où U, est ouvert dans E.*

Démonstration. La condition est nécessaire :

En effet, soit U un ouvert de $\prod\limits_{i=1}^{n} E_i$

$$\forall f = (f_1, ..., f_n) \in U, \quad \exists p = \sup_{1 \le i \le n} p_i \text{ (abus de notation)}, \, p_i \in P_i, r > 0 : f + B_p(r) \subset U$$

d'autre part

$$B_p(r) = B_{p_1}(r) \times B_{p_2}(r) \times ... \times B_{p_n}(r)$$

donc

$$\left[f_1 + B_{p_1}\left(r^0\right)\right] \times \left[f_2 + B_{p_2}\left(r^0\right)\right] \times ... \times \left(\left[f_n + B_{p_n}\left(r^0\right)\right]\right) \subset U$$

soit $U =$ la réunion des éléments de cette forme (ci-dessus)

$$U = \bigcup_{f=(f_1,...,f_n)\in U} \left[f_1 + B_{p_1}\left(r^0\right)\right] \times \left[f_2 + B_{p_2}\left(r^0\right)\right] \times ... \times \left[f_n + B_{p_n}\left(r^0\right)\right].$$

La condition est suffisante.

De fait, soit U_i un ouvert dans E_i.

Soit

$$f = U = f_1, ..., f_n \in \prod_{i=1}^{n} U_i$$

$$\forall i, \; f_i \in U_i \longrightarrow \exists p_i, r_i > 0 : f_i + B_{p_i}(r_i) \subset U_i.$$

Si on pose

$$r = \inf_{1 \le i \le n} r_i, \qquad p = \sup_{1 \le i \le n} p_i$$

on voit que

$$f_1 + B_p(r) = [f_1 + B_{p_1}(r)] \times ... \times [f_n + B_{p_n}(r)] \subset U = [f_1 + B_{p_1}(r_1)] \times ... \times [f_n + B_{p_n}(r_n)] \subset \prod_{i=1}^{n} E_r.$$

□

Propriété 1.8.1.

a) - **Une suite d'élément de $\prod\limits_{i=1}^{n} E_r$ est convergente (rep de Cauchy si et seulement si $\forall rsn$ projection sur E_i est convergente (rep de Cauchy).**

Il suffit de voir que :

si on pose

$$p = \sup_{1 \le i \le n} p_i, \; p_i(f_i) \le p(f) = p = \sup_{1 \le i \le n} p_i(f_i).$$

Si

$$p(f) \longrightarrow 0 \Longrightarrow p_i(f_i) \longrightarrow 0, \; \forall i \Longrightarrow p(f) \longrightarrow 0.$$

b) - **Tout produit fini d'espace nombrable (rep métrisable de Banach de Frechet) est nombrable, (rep métrisable de Banach, de Frechet.**

L'espace $\prod\limits_{i=1}^{n} E_i$ est séparable $\Longrightarrow \forall i, E_i$ est séparable.

Une partie A de $\prod\limits_{i=1}^{n} c_i$ est bornée (rep précompact)$\Leftrightarrow$ $\forall i$, sa projection sur E_i est bornée (rep précompact).

Si A précompact, $\forall i$ fixé soit $p_j \in P$.

Compétitions p_j pour obtenir une semi-norme $p = \sup\limits_{1\leq i\leq n} p_i$

$$\forall r > 0,\ \ \exists\, f^{(m)} = \left(f_1^{(m)},\ f_2^{(n)},\ f_n^{(n)}\right) \in \prod_{i=1}^{n} E_i,\ mm \leq k \text{ (un nombre fini) :}$$

$$A \subset \bigcup_{n=1}^{k} \left[f^{(m)} + B_p\,(r)\right] \Longrightarrow A_j \subset \bigcup_{n=1}^{k} \left[f^{(m)} + B_{p_i}\,(r)\right].$$

Réciproquement :

Supposons A_i précompact $\forall i$.

Soit

$$p = \sup_{1\leq i\leq n} p_i,\ r > 0 :$$

$$\forall i,\quad \exists\, f_i^{(1)}, ...f_i^{(k_i)} \in E_i : A_i \subset \bigcup_{n=1}^{k} \left(f^{(m)} + B_p\,(r)\right)$$

$$\Longrightarrow A \subset A_1 \times A_2 \times ... \times A_n \subset \bigcup_{m_1=1}^{k_1} \bigcup_{m_2=1}^{k_2} \bigcup_{m_3=1}^{k_3} .... \bigcup_{m_n=1}^{k_n} (f_1^{m_1},\ \ f_2^{m_2},\ \ ....f_n^{m_n}) + B_p\,(r)\,.$$

Remarque 1.8.1. *Si on remplace précompact par compact ; la propriété d) n'est pas valable. on prend par exemple A le disque ouvert plus 4 points bien disposés.A n'est pas compact pourtant la projection de A sur chaque axe est compact.*

1.9 Applications aux opérateurs linéaires et aux fonctionnelles linéaires

1.9.1 Opérateurs linéaires

Soient E, F deux espaces linéaires

Un opérateur linéaire de E dans F est une application $F, E \longrightarrow F$ telle que :

$$T\,(\alpha f + \beta g) = \alpha\, T\,(f) + \beta T\,(g) \qquad \forall\, f, g \in E\,;\quad \forall\, \alpha, \beta \in \mathbb{C}.$$

On appelle image par T de $A \subset E$

l'ensemble :

$$TA = \{Tf \quad f \in A\}$$

en particulier l'image de T est $T\,E$ notée $R\,(T)$

l'image inverse par T de $B \subset F$ est :

$$T^{-1}B = \{f \in E : Tf \in B\}$$

le noyau de T est $T^{-1}\{0\}$ noté $N(T)$

$R(T)$ et $N(T)$ sont des sous-espaces linéaires de F respectivement de E.

Soit T un opérateur linéaire de E dans F., q une sémi-norme sur F

l'application

$$E \longrightarrow \mathbb{R} : f \longrightarrow q(Tf)$$

est une semi-norme sur E.

En effet :

$$\begin{aligned} q(T(\alpha f)) &= |\alpha|\, q(Tf) : \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}, \quad \forall f \in E \\ q(T(f+g)) &= q(Tf+Tg) \le q(Tf) + q(Tg), \ \forall f, g \in E. \end{aligned}$$

Soient (E, P) et (F, Q) des espaces linéaires à semi-normes.

Un opérateur linéaire T de E dans F est continue s'il est continue en tout par $f \in E$

$$\forall\, f \in E \quad \forall n \text{ voisinage de } T(f), \ \exists\, V \text{ voisinage de } f : g \in V \Longrightarrow T(g) \in W$$

$$\forall\, f \in E, \ \ \forall q_i \in Q \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad p \in P \quad r > 0 : \ p(g-f) \le r \Longrightarrow q(T_g - Tf) \le \varepsilon$$

$$\forall\, f \in E \quad \forall\, q \in Q \quad \forall\, \varepsilon > 0 \quad T^{-1}B_q(Tf, \varepsilon) \text{ et un voisinage de } f.$$

Théorème 1.9.1. *Si T est un opérateur linéaire de E dans F les assertion suivantes sont équivalentes :*

(i) T *est continue*

(ii) T *est continue en* 0

(iii) $\forall q \in Q \ \ \exists\, \varepsilon > 0, \ T^{-1}B_q(\varepsilon)$ *est un voisinage de* 0

(iv) $\forall q \in Q \ \ \exists p \in P \quad c > 0 \quad q(Tf) = cp(f), \ \forall\, f \in E.$

Démonstration. $(i) \Longrightarrow (ii)$; $(ii) \Longrightarrow (iii)$ (évident).

$T^{-1}B_q(\varepsilon)$ voisinage de $0 \Longrightarrow \exists p \in P., r > 0. \big(B_p(r) \subset T^{-1}B_q(\varepsilon) \Leftrightarrow p(f) \le r, \Longrightarrow q(Tf)\,\varepsilon\big)$

$$\Longrightarrow q(Tf) \le \frac{\varepsilon}{r} p(f)\,.\ \forall f \in E.$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$ $\quad \forall f \in E, \ \forall q \in Q. \varepsilon > 0, \ \exists p \in P, c > 0$

$$g \in B_p\left(f, \frac{\varepsilon}{c}\right) \Longrightarrow p(g-f) \le \frac{\varepsilon}{c} \Longrightarrow q(T_g - T_f) = q(T(g-f)) \le \varepsilon.$$

□

Exemple :

Si E est de dimension finie tout opérateur linéaire de E dans F est continu.

Si $(\ell_i ... \ell_n)$ est une base de E

$$\forall\, f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_i \in E \quad \forall\, q \in Q$$

on peut écrire

$$q(Tf) = q\left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| T(\ell_i)\right) \le \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| q(T\ell_i) \le \left(\sum_{i=1}^{n} |\alpha_i|^1\right)^{\frac{1}{2}} \left(\sum_{i=1}^{n} q\left(T(\ell_i)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}} \le c\|f\|.$$

T est continue.

Théorème 1.9.2. *Si T est un opérateur linéaire continu de E dans F, alors l'image par T de E.*

- Toute suite convergente (resp de Cauchy) est une suite convergente (resp de Cauchy).

- Tout borné (resp compact, précompact extractable) est borné (resp compact, précompact, extractable).

Démonstration. - Soit

$$f_m \longrightarrow f, \quad \forall q \in Q, \ \exists p \in P, \ c > 0$$

$$\begin{aligned} q(Tf_m - Tf) &\le c\,p(f_m - f) \longrightarrow 0, \ m \longrightarrow \infty \\ q(Tf_s - Tfr) &\le c\,p(f_r - fs) \longrightarrow 0, \ r, s \longrightarrow \infty. \end{aligned}$$

- Soit $A \subset E$.

Si A est borné

$$\forall p \in P, \quad \sup_{f\in A} p(f) < +\infty$$

$$\forall q \in Q, \ \exists p \in P: \ q(Tf) \le c\,p(f), \quad \forall f \in A$$

donc

$$\sup_{f\in A} q(Tf) \le c \sup_{f\in A} p(f) < +\infty.$$

Si A est compact :

Soit $(V_i)_{i\in I}$ un recouvrement ouvert de TA, $\left(T^{-1}(V_i)\right)_{i\in I}$ et un recouvrement ouvert de A :

$$\Longrightarrow \exists\, n : A \subset \bigcup_{i=1}^{n} T^{-1}(V_i)$$

par suite $\bigcup_{i=1}^{n} V_i \supset TA$.

Si A est précompact.

Soit

$$q \in Q, \ r > 0 : \quad \exists\, p \in P, c > 0 \quad q(Tf) \le c\,p(f).$$

$$\exists f_1, ...f_n \in A : A \subset \{f_1, ...f_n\} + B_p\left(\frac{r}{c}\right) \Longrightarrow TA \subset \{Tf_1, ...Tf_n\} + B_q(r).$$

Si A est extractable.

Soit g_m une suite d'éléments de

$$TA, ..., \exists f_m \in A. \quad Tf_m = g_m.$$

A étant extractable, $\exists\, f_{m_k}$, une sous-suite de $f_m \longrightarrow f \in A$, mais Tf_m est une sous-suite de $g_m \longrightarrow g \in T\,A$, vu ce qui précède.

□

Théorème 1.9.3. *Si E est métrisable, un opérateur linéaire de E dans F est continu si et seulement si transforme toute suite tendance vers 0 en une suite bornée.*

Démonstration. La condition est suffisante.

En effet supposons T non continu

$$\Longrightarrow \exists\, q \in Q,\ f_m \in E : 1 = q\left(Tf_m\right) > m^2 p_m\left(f_m\right)$$

posons

$$g_m = mf_m \longrightarrow 0, m \longrightarrow \infty, p_m\left(g_m\right) = mp_m\left(f_m\right) \leq \frac{1}{m} \longrightarrow 0, m \longrightarrow \infty$$

$$q\left(Tg_m\right) = m_q\left(Tf_m\right) = m, \forall m,$$

ce qui est absurde. $\left(Tg_m\right)$. La condition est évidemment nécéssaire. □

Théorème 1.9.4. *Si E est de Frechet, un opérateur linéaire $T : E \longrightarrow F$ est continu si et seulement si*

$$\forall_q \in Q, \exists \varepsilon > 0\, T^{-1} B_q\left(\varepsilon\right)$$

est fermé dans E.

Démonstration. La condition est trivialement nécéssaire.

La condition est suffisante, soit $q \in Q$, soit $\varepsilon > 0 : T^{-1}B_q\left(\varepsilon\right)$ soit fermé dans E.

$T^{-1}B_q\left(\varepsilon\right)$ es absolument convexe et aborbant.

Donc

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} T^{-1} B_q\left(\varepsilon\right)$$

(réunion de fermer, dénombrable).

$E = \overset{\circ}{\mathrm{E}} \neq \phi$, Vu le théorème de Baire

$$\exists\, m : m\, \overset{0}{\widehat{T^{-1}B_q}}\left(\varepsilon\right) \neq \phi$$

donc

$$\overset{0}{\widehat{T^{-1}B_q\left(\varepsilon\right)}} \neq \phi,\ T^{-1}B_q\left(\varepsilon\right)$$

est un voisinage de 0 donc T est continu. □

1.9.2 Théorème du graphe fermé

:

Soit T un opérateur linéaire de $E \longrightarrow F$.

Le graphe de T est l'ensemble

$$G\left(T\right) = \left\{\left(f, T_f\right)\ f \in E\right\}.$$

Le graphe de T est un sous-espace linéaire de $E \times F$.

Si T est continu $\Longrightarrow G\left(T\right)$ est fermé dans $E \times F$.

En effet si

$$(f,g) \notin G(T) \Longrightarrow g \neq Tf \Longrightarrow \exists\, q \in Q, r > 0 : B_q(g,\varepsilon) \cap B_q(Tf,\varepsilon) = \emptyset.$$

T continu

$$\Longrightarrow \exists\, p \in P, r > 0 : T\,B_p(f,r) \subset B_q(Tf,\varepsilon)$$

mais alors

$$T\,B_p(f,r) \cap B_q(g,\varepsilon) = \phi$$
$$\Longrightarrow [B_p(f,r) \times B_q(g,\varepsilon)] \cap G(T) = \phi.$$

· Si E et F sont métrisables, $E \times F$ est aussi métrisable.

Dans ce cas $G(T)$ est fermé dans

$$E \times F \Longleftrightarrow ((f_m, Tf_m) \longrightarrow (f,g) \Longrightarrow Tf = g)$$

$$\Longleftrightarrow \left.\begin{array}{lll} (f_m \longrightarrow f & \text{dans} & E \\ Tf_m \longrightarrow g & \text{dans} & F \end{array}\right\} \Longrightarrow g = Tf).$$

Théorème 1.9.5 (du graphe fermé)**.** *Si E et$F$ sont de l'espace de Frechet. Un opérateur linéaire T de E dans F est continu si et seulement si il vérifie l'assertion*

$$(f_m \longrightarrow f \text{ dans } E,\ Tf_m \longrightarrow g \text{ dans } F) \Longrightarrow g = Tf.$$

Démonstration. La condition est éidemment nécessaire.

La condition est nécessaire suffisante.

Il suffit de prouver que $\forall q \in Q$, $T^{-1}B_q(1)$ est un voisinage de 0.

Posons $B = B_q(1)$, $T^{-1}B$ est absolument convexe et absorbant.

$$E = \bigcup_{m=1}^{\infty} m\,T^{-1}B = \bigcup_{m=1}^{\infty} m\,\widehat{T^{-1}B}.$$

Vu le théorème de Baire

$$\exists m : m\,\overset{0}{\widehat{T^{-1}B}} \neq \phi \Longrightarrow \overset{0}{\widehat{T^{-1}B}} \neq \phi.$$

Donc $\widehat{T^{-1}B}$ est un voisinage de 0.

Par conséquent

$$\exists\, p \in P, r > 0 : Bp(r) \subset \widehat{T^{-1}B}.$$

Soit $q_1 \leq q_2 \leq \ldots$ lessémi-normes qui majorent q (de Q).

Considérons

$$B_1 = B_{q_1}\left(\frac{1}{2}\right),\ B_2 = B_{q_2}\left(\frac{1}{2^2}\right), \ldots B_m = B_{q_m}\left(\frac{1}{2^m}\right) \ldots$$

par le même raisonnement que précédemment

$$\begin{aligned} \exists\, p_1 &\in P, r_1 > 0 : Bp_1(r_1) \subset \widehat{T^{-1}B_1},\ p_1 \geq p,\ r_1 < \frac{1}{2} \\ \exists\, p_2 &\in P, r_2 > 0 : Bp_2(r_2) \subset \widehat{T^{-1}B_2},\ p_2 \geq p_1,\ r_2 < \frac{1}{2^2} \\ \exists\, p_m &\in P, r_m > 0 : Bp_m(r_m) \subset \widehat{T^{-1}B_m},\ p_m \geq p_{m-1},\ r_m < \frac{1}{2^m}. \end{aligned}$$

Montrons que
$$\widehat{T^{-1}B} \subset 2T^{-1}B.$$
Soit $f \in \widehat{T^{-1}B}$, $\exists$ successivement
$$\begin{aligned} f_0 &\in T^{-1}B : f - f_0 \in B_{p_1}(r_1) \subset \widehat{T^{-1}B_1} \\ f_2 &\in T^{-1}B_1 : f - f_0 - f_1 \in B_{p_1}(r_1) \subset \widehat{T^{-1}B_1}. \\ f_m &\in T^{-1}B_m : f - f_0 - f_1 ... f_m \in B_{p_m}(r_m) \subset T^{-1}B_m. \end{aligned}$$
La suite
$$\sum_{k=0}^{m} f_k \longrightarrow f,\, m \longrightarrow \infty \;\text{ car }\; p_m\left(f - \sum_{k=0}^{m} f_k\right) \longrightarrow 0,\, m \longrightarrow \infty.$$
Considérons $\sum_{k=0}^{m} Tf_k$, est telle que
$$\forall n,\, \forall r,\, s \geq n$$
$$q_n\left(\sum_{k=r}^{s} Tf_k\right) \leq \sum_{k=r}^{s} q_n(Tf_k) \leq \sum_{k=r}^{s} q_k(Tf_k) \leq \sum_{k=r}^{s} \frac{1}{2^k} \longrightarrow 0,\, r,\, s \longrightarrow \infty$$
par conséquent $\sum_{k=0}^{m} Tf_k$ est une suite de Cauchy dans F de Frechet donc :
$$\exists\, g \in F : \sum_{k=0}^{m} Tf_k \longrightarrow g$$
on note que :
$$Tf_0 \in B,\, Tf_k \in B_k \subset 2^{-k}B,\ \forall\, k \geq 1 \qquad \text{Vu que }\; B_k = 2^{-k}Bq_m(1)$$
et que
$$B = Bq(1) \quad \text{avec }\; q \leq q_k \qquad Bq_m(1) \subset B_q(1)$$
on a alors :
$$\sum_{k=0}^{m} Tf_k \in B + \sum_{k=1}^{m} 2^{-k}B = \left(1 + \sum_{k=1}^{s} 2^{-k}\right) B \subset 2B,\ \ \forall m.$$
car
$$1 + \sum_{k=1}^{m} 2^{-k} < 2$$
et B est absolument convexe

donc $g \in 2B$.

Vu l'hypothèse du théorème :
$$\sum_{k=0}^{m} f_k \longrightarrow f \text{ dans } E, T\left(\sum_{k=0}^{m} f_k\right) \longrightarrow g \text{ dans } F \Longrightarrow g = Tf$$
$$g = Tf \in 2B \Longrightarrow f \in 2T^{-1}B.$$
on conclut que $2T^{-1}B$ est un voisinage de 0 donc $T^{-1}B_q(1)$ est un voisinage de 0 et par suite T est continu.

□

Corollaire 1.9.1. *Si E et F sont de Frechet et si T est un opérateur linéaire continu bijectif de E sur F alors T^{-1} est un opérateur linéaire continu de F sur E.*

Démonstration. Il suffit de prouver que T^{-1} est continu, pour cela on applique le théorème du graphe fermé.

$$\left.\begin{array}{c} g_m \longrightarrow g \text{ dans } F \\ T^{-1}g_m \longrightarrow g \text{ dans } E \end{array}\right\} \Longrightarrow f = T^{-1}g.$$

En effet :

$$\begin{aligned} g_m \longrightarrow g \text{ dans } F,\ T\left(T^{-1}g_m\right) \longrightarrow T\left(f\right) \Longrightarrow T\left(f\right) \\ \Longrightarrow \quad \left.\begin{array}{c} g_m \longrightarrow g \\ g_m \longrightarrow Tf \end{array}\right\} \Longrightarrow g = Tf \Longrightarrow f = T^{-1}g. \end{aligned}$$

□

Chapitre 2

Espaces de Banach

Sommaire

2.1 Définitions – Applications linéaires continues

Dans toute la suite, il s'agira d'un espace vectoriel E de dimension finie ou infinie, sur le corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). Lorsque différents *e.v.* interviendront, dans le même énoncé, ils auront (sauf mention du contraire) même corps de scalaires. Si E est un *e.v.* complexe, ne pas oublier qu'il possède une structure d'*e.v.* réel sous-jacent en restreignant les scalares à $\mathbb{R}$. on supposera connue la notion d'*e.v.*

Définition 2.1.1. *On appelle norme, sur un e.v. E, toute application de E dans $\mathbb{R}^+$, notée $x \longrightarrow \|x\|$, telle que :*

i) $\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

ii) $\|\alpha x\| = |\alpha| \, \|x\| \qquad \forall\, x \in E,\ \alpha \in \mathbb{K}$

iii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \qquad \forall\, x \in E$

E est alors appelé un espace vectoriel normé (e.v.n.)

On définit la distance entre deux points x, y de E par $d(x, y) = \|x - y\|$.

Donc E est un espace métrique et possède une structure topologique.

Si (E, d) est complet, il est appelé un espace de Banach ou, plus simplement un Banach.

Remarque 2.1.1. *1) Si E est un e.v. et si d est une distance sur E, il n'existe pas forcément de norme sur E, qui induise d ; une distance induite par une norme vérifie :*

$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha| \, d(x, y) \qquad , \forall \quad x, y \in E \ \alpha \in \mathbb{K}$

$d(x+z,\, y+z) = d(x,y) \qquad \forall \quad x,y,z \in E$
$d(x,0) = \|x\| \qquad \forall \quad x, \in E.$
Or, si on considère l'e.v. $\mathbb{C}^{\infty}$ *sur* $\mathbb{C}$ *muni de la distance* d *définie par :*

$$d(x,y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{|x_i - y_i|}{1 + |x_i - y_i|} \quad ou \quad \begin{cases} x = (x_1,\, x_2, ..., x_n, ...) \\ y = (y_1,\, y_2, ..., y_n, ...) \end{cases}$$

on vérifie que

$$d(\alpha x, \alpha y) \neq |\alpha|\, d(x,y).$$

2) *Soit*

$$\underline{E = E_1 \times E_2 \times ... \times E_n} \quad où \quad \underline{E_i \text{ est un } e.v.n.} \quad Notation \ \|.\|_i \equiv \|.\|$$

on obtient des normes (usuelles) sur E*, en posant :*

$$\begin{aligned} \|x\|_1 &= \textstyle\sum_{i=1}^{n} \|x_i\| \\ \|x\|_2 &= \left(\textstyle\sum_{i=1}^{n} \|x_i\|^2\right)^{1/2} \qquad \forall\, x = (x_1,\, x_2, ..., x_n) \in E \\ \|x\|_3 &= \sup_{i=1,2,...,n} \|x_i\| \end{aligned}$$

on montre facilement que

$$\|x\|_3 \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n}\, \|x\|_2 \leq n\, \|x\|_3\,, \quad \forall\, x \in E$$

et que les distances induites sont uniformément équivalentes.

Définition 2.1.2. *Deux normes sont (uniformément) équivalentes s'il existe des réels* $a,\, b > 0$ *tels que*

$$a\, \|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq b\, \|x\|_1\,.$$

Théorème 2.1.1. *La topologie induite par la norme est compatible avec la structure d'e.v. i.e : pour les normes usuelles sur* $E \times E$*.*
i) *l'application* $(\alpha, x) \longrightarrow \alpha x$ *de* $\mathbb{K}\times E$ *dans* E *est continue*
ii) *l'application* $(x,y) \longrightarrow x+y$ *de* $E \times E$ *dans* E *est (uniformément) continue*
De + : l'application $x \longrightarrow \|x\|$ *de* E *dans* $\mathbb{R}^+$ *est (uniformément) continue.*

Démonstration. Munissons $--$ $E \times E$ de la norme $\|(x,y)\| = \|x\| + \|y\|$
$--$ $\mathbb{K} \times E$ de la norme $\|(\alpha, x)\| = \|\alpha\| + \|x\|$
Où $\|\|$ = norme de E
i) Si $z = (\alpha, x)$ et $z_0 = (\alpha_0, x_0)$ sont deux vecteurs de $\mathbb{K}\times E$ vérifiant

$$\|z - z_0\| \leq \delta, \quad i.e.\, \|z - z_0\| = |\alpha - \alpha_0| + \|x - x_0\| \leq \delta,$$

on a

$$|\alpha - \alpha_0| \leq \delta, \|x - x_0\| \leq \delta \text{ et enfin } \|x\| \leq \|x_0\| + \delta \leq \|x_0\| + 1 \text{ si } \delta \leq 1.$$

Alors

$$\|\alpha x - \alpha_0 x_0\| = \|\alpha_0 (x - x_0) + (\alpha - \alpha_0)\, x\| \leq |\alpha_0|\, \|x - x_0\| + |\alpha - \alpha_0|\, \|x\|$$

$$\leq |\alpha_0|\,\delta + \delta\left(\|x_0\| + 1\right) = \delta\left(|\alpha_0| + \|x_0\| + 1\right) < \varepsilon \;\text{ si }\; \delta < \frac{\varepsilon}{|\alpha_0| + \|x_0\| + 1}.$$

Supposons l'application uniformément continue, *i.e.* :

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists\, \delta\left(\varepsilon\right) \geq 0 \text{ tel que } \|z - z_0\| = |\alpha - \alpha_0| + \|x - x_0\| \leq \delta \Longrightarrow \|\alpha x - \alpha_0\| \leq \varepsilon.$$

Si, en particulier,

$$x = x_0,\ \text{on a } |\alpha - \alpha_0| \leq \delta \Longrightarrow |\alpha - \alpha_0|\,\|x\| \leq \varepsilon$$

et ceci est faux pour $\|x\| > \dfrac{\varepsilon}{\delta}$.

ii) Si $z = (x, y)$ et $z_0 = (x_0, y_0)$ sont deux vecteurs de $E \times E$ vérifiant $\|z - z_0\| \leq \delta$, i.e.

$$\|z - z_0\| = \|x - x_0\| + \|y - y_0\| \leq \delta,\ \text{on a } \|(x + y) - (x_0 + y_0)\| \leq \|x - x_0\| + \|y - y_0\| \leq \delta$$

ce qui montre que l'application $x, yx + y$ est uniformément continue.

De $+$, l'inégalité $|\|x\| - \|x_0\|| \leq \|x - x_0\|$ montre que $x \longrightarrow \|x\|$ est uniformément continue. $\square$

Définition 2.1.3. *Soit E un e.v.n. et soit $\{u_n\}$ une suite de E. Soit $U_n = u_1 + ... + u_n$ $\forall_n = 1, 2, \ldots$. Si $\{U_n\}$ est convergente dans E, de limite U, on dit que la série de terme général u_n est convergente dans E et que U est sa somme :*
$U = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$. La série est dite normalement, |absolument convergente| si la série des normes $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n\|$ est convergente

Remarque 2.1.2. *Le théorème* 2.1.1 *permet d'affirmer que*

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k^{(n)} x_k^{(n)} \longrightarrow \sum_{k=1}^{m} \alpha_k\, x_k$$

si

$$\alpha_k^{(n)} \longrightarrow \alpha_k \quad \textit{et si} \quad x_k^{(n)} \longrightarrow x_k.$$

Théorème 2.1.2. *Soit M un sous-espace vectoriel fermé d'un e.v.n. E. on définit l'espace quotient $E/_M$ par la relation d'équivalence*

$$x\mathcal{R}y \Longleftrightarrow x - y \in M$$

et on pose, pour une classe

$$x + M = \dot{x},\ \|x + M\| = \|\dot{x}\| = \inf\left\{\|x + m\|\,;\ m \in M\right\}.$$

Alors $E/_M$ est un e.v.n. Si, de $+, E$ est un Banach, $E/_M$ est un Banach.

Démonstration. Remarquons d'abord l'indépendance du représentant de la classe : Si

$$y \in \dot{x} \text{ et si } \|\dot{x}\| = \inf \{\|y+m\| \; ; m \in M\}$$

alors, comme

$$y - x \in M, \text{ i.e. } y = x + m$$

on a

$$\|\dot{x}\| = \inf \left\{ \left\| x + \underbrace{m' + m}_{=m'' \in M} \right\| \; ; \, m'' \in M \right\}.$$

i)

$$\|\dot{x}\| = \inf \{\|x+m\| \; ; \, m \in M\} = 0 \Longleftrightarrow \forall \varepsilon \geq 0, \;\; \exists m_k \in M \;\; \text{tel que} \;\; \|x + m_k\| \leq \varepsilon$$

ou encore

$$\|x - (-m_k)\| \leq \varepsilon \Longleftrightarrow x \in \bar{M} = M$$

ii)

$$\begin{aligned} \left\| \dot{\widehat{\alpha x}} \right\| &= \inf \{\|\alpha x + m\| \; ; \, m \in M\} = |\alpha| \inf \left\{ \left\| x + \frac{m}{\alpha} \right\| \; ; \, m \in M \right\} \text{ si } \alpha \neq 0 \\ &= |\alpha| \inf \left\{ \left\| x + \frac{m}{\alpha} \right\| \; ; \, m \in M \right\} = |\alpha| \, \|\dot{x}\| \end{aligned}$$

Car M est un *s.e.v.* (Le cas $\alpha = 0$ est trivialement vérifié).
iii)

$$\|\dot{x} + \dot{y}\| = \left\| \dot{\widehat{x+y}} \right\| = \inf \{\|x+y+m\| \; ; \, m \in M\} \leq \inf \left\{ \left\| x + \frac{m}{2} \right\| + \left\| y + \frac{m}{2} \right\| \; ; \, m \in M \right\} =$$

$$\begin{aligned} \inf \{\|x+m\| + \|x+m\| \; ; \, m \in M\} &= \inf \{\|x+m\| \; ; \, m \in M\} + \inf \{\|x+m\| \; ; \, m \in M\} \\ &= \|\dot{x}\| + \|x+m\| \; ; \, m \in M \end{aligned}$$

· On suppose à présent, que E est complet. Soit $\{x_n + M\}$ une suite de Cauchy dans $E/_M$.

Remarquant qu'une suite de Cauchy converge si et seulement si elle a une sous-suite convergente, il suffit d'extraire de la suite $\{x_n + M\}$ une sous-suite convergente $\{x_n + M\}$ étant suite de Cauchy, il existe une sous-suite

$$\left\{ x_{n_1} + M, \; x_{(n_1+1)} + M, ... \right\}$$

telle que

$$\left\| x\left(_{n_1+k}\right) + M - x_{(n_1+p)} + M \right\| \leq \frac{1}{2}, \quad \forall k, p \in \mathbb{N}.$$

De cette sous-suite (de Cauchy), on peut extraire une sous-suite

$$x_{n_2} + M, \; x_{(n_2+1)} + M, \ldots$$

telle que

$$\left\| x_{(n_2+k)} + M - x_{(n_2+p)} + M \right\| \leq \frac{1}{2^2}, \quad \forall k, p \in \mathbb{N}.$$

De cette sous-suite (de Cauchy), on peut extraire une sous-suite

$$\left\{x_{n_3} + M, \quad x_{(n_3+1)} + M, ...\right\}$$

telle que

$$\left\|x_{(n_3+k)} + M - x_{(n_3+p)} + M\right\| \frac{1}{2^3}, \quad \forall k, p \in \mathbb{N},$$

etc...,

Considérons maintenant la "diagonale" $\{y_i + M\}$ de ces sous-suites, où

$$y_i = x_{(n_i+i)} - 1,$$

on observe que

$$\|\{(y_{i+1} + M) - y_i + M\}\| = \|(y_{i+1} - y_i) + M\| \leq \frac{1}{2^i}$$

et, par définition de la norme sur

$$E/_M, \; \exists\, u_i \in (y_{i+1} - y_i) + M \quad t.q. \; \|u_i\| \leq \frac{1}{2^i}.$$

Choisissons

$$z_i \in y_i + M \quad \text{tel que } \; z_{i+1} - z_i = u_i, \quad \forall i.$$

Montrons que $\{z_n\}$ est une suite de Cauchy dans E : si $m < n$

$$. \, \|z_m - z_n\| \leq \|z_m - z_{m+1}\| + ... + \|z_{n-1} - z_n\| \leq \frac{1}{2^m} + ... + \frac{1}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^m}\left[1 + \frac{1}{2} + ... + \frac{1}{2^{n-m}}\right] < \frac{1}{2^{m-n}}$$

E étant complet,$\{z_n\} \longrightarrow z$

–Montrons que

$$\{y_i + M\} \longrightarrow z + M.$$

Comme

$$y_i + M = z_i + M,$$

$$\|(z + M) - (y_i + M)\| = \|(z + M) - (z_i + M)\| = \|z - z_i + M\| \leq \|z - z_i\| \longrightarrow 0.$$

□

Remarque 2.1.3. *Si M n'est pas fermé, soit*

$$y \in \bar{M}, \quad y \notin M.$$

Alors $\dot{y} \neq \dot{0}$.

Mais

$$\|\dot{y}\| = \inf_{x \in M} \|y - x\| = 0.$$

Exemples d'espaces de Banach :

1) $\mathbb{K}$, $\mathbb{K}^n$, $\mathbb{K}^\infty$ munis des normes usuelles (Rappel ; Le produit d'espaces métriques complets et complet et réciproquement).

2) $\mathfrak{C}(X, \mathbb{K})$ muni de
$$\|f\| = \sup_{x \in X} |f(x)|,$$
car $\mathbb{K}$ est complet

3) Soient X un ensemble quelconque, A une $\sigma-$algèbre de sous-ensembles de X et μ une mesure sur A. Considérant un ensemble $E \in A$, on définit l'espace vectoriel
$$L_p(E, \mu), 1 \leq p < \infty,$$
des classes d'équivalence de fonctions réelles mesurables dont la puissance $p^{ième}$ est intégrable sur E.

· L'inégalité de Minkowski, pour intégrale, permet de vérifier que
$$\|f\|_p = \left(\int_E |f|^P d_\mu \right)^{1/p}, \quad f \in L_p(E, \mu)$$
safisfait l'inégalité triangulaire.

La relation $\|f\|_p = 0$ n'implique pas $f = 0$, mais seulement $f = 0$ presque partout on doit donc identifier les fonctions égales *p.p.*, par une relation d'équivalence. Alors $\|f\|_p$ est une norme.

· $L_p(E, \mu)$ est complet pour cette norme : Soit $\{f_n\}$ une suite de Cauchy dans $L_p(E, \mu)$ *i.e.* :
$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists N(\varepsilon) \quad t.q. \ n, m > N(\varepsilon) \Longrightarrow \|f_n - f_m\|_p = \left(\int_E f_n - f_m/^p d_\mu \right)^{1/p} < \varepsilon.$$
Ceci implique que $\{f_n\}$ est une suite de Cauchy en mesure et donc (revoir la Théorie de la mesure) qu'il existe une sous-suite $\{f_{n_i}\}$ convergente presque partout, *i.e.* : $\exists f$ mesurable telle que $\lim_i f_{n_i} = f \quad p.p.$ Pour un j fixé, on a donc
$$\lim_i |f_{n_j} - f_{n_i}|^p = |f_{n_j} - f|^p.$$
En vertu du lemme de Fatou :
$$\int_E \frac{\lim}{i} \left|f_{n_j} - f_{n_i}\right|^p d_\mu = \int_E \left|f_{n_j} - f\right|^p d_\mu \leq \frac{\lim}{i} \int_E \left|f_{n_j} - f_{n_i}\right|^p d\mu.$$
Soit $\varepsilon_0 > 0$. $\{f_n\}$ étant de Cauchy,
$$\exists N(\varepsilon_0) \quad \text{tel que} \quad n_j, n_i > N(\varepsilon_0) \Longrightarrow \int_E \left|f_{n_j} - f_{n_i}\right|^p d_\mu \leq \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^p$$
et donc
$$\frac{\lim}{i} \int_E \left|f_{n_j} - f_{n_i}\right|^p d_\mu \leq \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^p \quad \text{si} \quad n_j > N(\varepsilon_0)$$
d'où
$$\int_E \left|f_{n_j} - f\right|^p d_\mu \leq \left(\frac{\varepsilon_0}{2}\right)^p \quad \text{si} \quad n_j > N(\varepsilon_0) \quad \text{et donc} \quad \left(f_{n_j} - f\right) \in L_p(E, \mu).$$

Comme

$$f_{n_j} \in L_p(E,\mu), \quad \text{on obtient} \quad \underline{f \in L_p(E,\mu)}.$$

Appliquant l'inégalité de Minkowski pour les intégrales,

$$\|f_n - f\| = \left(\int_E |f_n - f|^P d_\mu\right)^{1/p} \leq \left(\int_E |f_n - f_{n_j}|^P d_\mu\right)^{1/p} + \left(\int_E |f_{n_j} - f|^P d_\mu\right)^{1/p} \leq \frac{\varepsilon_0}{2} + \frac{\varepsilon_0}{2} = \varepsilon$$

et donc $\lim f_n = f$.

4) Soit $1 \leq p < \infty$. On appelle l_p^n l'espace $\mathbb{K}^n$ muni de

$$\|x\|_P = \left(\sum_{i=1}^n |x_i/^P|\right)^{1/P}.$$

On appelle l_p l'espace de toutes les suites $t.q.$

$$\sum_{i=1}^\infty |x_i|^P < \infty \quad \text{muni de} \quad |x|_P = \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^P\right)^{1/P} \quad \text{où} \quad x_i \in \mathbb{K}, \quad \forall i.$$

L'inégalité de Minkowski

$$\left(\sum_{i=1}^\infty |x_i + y_i|^P\right)^{\frac{1}{P}} \leq \left(\sum_{i=1}^\infty |x_i|^P\right)^{\frac{1}{P}} + \left(\sum_{i=1}^\infty |y_i|^P\right)^{\frac{1}{P}}$$

permet de montrer qu'il s'agit de normes.

Montrons que l_p^n et l_p sont complets. Par exemple pour l_p, en utilisant ce qui précède : Si

$$X = \{1, 2, ..., n, ...\} = \mathbb{Z}^+,$$

la famille $\mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)$ de tous les sous-ensembles de $\mathbb{Z}^+$ est une $\sigma-$algèbre. Soit $E \in \mathcal{P}(\mathbb{Z}^+)$.

Définissons $\mu(E) = \begin{cases} \text{nombre d'éléments dans } E \text{ si } E \text{ est fini} \\ +\infty \text{ si } E \text{ est infini} \end{cases}.$

Prenant $E = \mathbb{Z}^+$, considérons $L_P(\mathbb{Z}^+, \mu)$. Tous les souys-ensembles de $\mathbb{Z}^+$ étant dans la $\sigma-$algèbre, toutes les fonctions définies sur E sont mensurables. (Remarquons que ces fonctions sont, en fait, des suites). Alors

$$\int_{\mathbb{Z}^+} |f|^P d\mu = \int \bigcup_{n \subset \mathbb{Z}^+} \{n\} |f|^P d\mu = \sum_{n \in \mathbb{Z}^+} \int_{\{n\}} |f|^P d\mu = \sum_{n=1}^\infty |f(n)|_\mu^P (\{n\}) = \sum_{n=1}^\infty |f(n)|^P.$$

i.e.

$$f \in L_P(\mathbb{Z}+,) \Longleftrightarrow \{f(n)\} \in l_p.$$

l_p apparaît comme un cas particulier de L_P et donc est complet.

5) On appelle l_∞^n l'espace $\mathbb{K}^n$ muni de

$$\|x\|_\infty = \sup\{|x_1|, ..., |x_n|\}.$$

On appelle l_∞ l'espace de toutes les suites bornées muni de

$$\|x\| = \sup |x_i|, x_i \in \mathbb{K}, \ \forall i.$$

Considérant les $n-$uples comme des fonctions définies sur

$$X = \{1, 2, ..., n\}$$

et les suites comme des fonctions définies sur $\mathbb{Z}^+$, on a

$$l_\infty^n = \mathfrak{C}(X, \mathbb{K}), l_\infty = \mathfrak{C}(\mathbb{Z}^+, \mathbb{K})$$

et ils sont donc complets. (X et $\mathbb{Z}^+$ munis de la topologie discrète).

6) L'espace C de toutes les suites convergentes étant un sous-espace fermé de l_∞, il est complet et donc un Banach.

Se restreignant aux suites converentes vers 0, on obtient un Banach noté C_0.

7) $L_\infty =$ (classes d'équivalence de fonctions mesurables, réelles, bornées $p.p.$,définies sur un ensemble X, A étant $\sigma-$algèbre de sous-ensembles de X).

On pose :

$$\begin{cases} S(N) = \sup\{|f(x)|; x \notin N\} \text{ où } f \in L_\infty, \quad N \in A \text{ avec } \mu(N) = 0 \\ \|f\|_\infty = \inf S\{(N); \quad N \in A, \ \mu(N) = 0\}. \end{cases}$$

8) Etc...

Théorème 2.1.3. *Soient E et F deux e.v.n., u une application <u>linéaire</u> de E dans F.*

Les assertions suivantes sont équivalentes :

(1) u est continue en tout point de E

(2) u est continue à l'origine 0

(3) $\|u(x)\|$ est borné sur la boule unité $B_1[0] = \{x; \|x\| \leq 1\}$.

(4) $\exists M \geq 0$ tel.que. $\|u(x)\| \leq M\|x\|, \quad \forall x \in E$ (u est dite <u>bornée</u>)

(5) u est uniformément continue sur E.

Démonstration. On note de la même façon : $\|.\|$ les 2 normes de E et de F.

(1) $\Longrightarrow$(2) évident.

(2) $\Longrightarrow$(3) Par définition de la continuité en 0 : $\exists \delta \geq 0$ t.q. $\|x\| \leq \delta \Longrightarrow \|u(x)\| \leq 1$

Alors $\|x\| \leq 1 \Longrightarrow \|\delta x\| \leq \delta \Longrightarrow \|u(\delta x)\| \leq 1 \Longrightarrow \|u(x)\| \leq \dfrac{1}{\delta}$

(3) $\Longrightarrow$(4) Si $x = 0$, $u(x) = 0$, c'est évident

Si $x \neq 0$, $\frac{x}{\|x\|} \in B_1[0]$ et donc $\left\|u\left(\frac{x}{\|x\|}\right)\right\| \leq M$ i.e $\|u(x)\| \leq M\|x\|$.

(4) $\Longrightarrow$(5) $\|u(x_1) - u(x_2)\| = \|u(x_1 - x_2)\| \leq M\|x_1 - x_2\|$ et u est lipschitzienne.

(5) $\Longrightarrow$(1) évident.

□

Définition 2.1.4. *L'ensemble des applications linéaires <u>continues</u> de E dans F est un e.v. qu'on note $L(E, F)$ et qu'on norme par :*

$$\begin{aligned} A &= \|u\| = \sup_{\|x\| \leq 1} \|u(x)\| \\ B &= \|u\| = \sup_{\|x\| = 1} \|u(x)\| \end{aligned}$$

Autres normes équivalenles :

$$\begin{aligned} C &= \|u\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|u(x)\|}{\|x\|} \\ B &= \|u\| = \inf\{\|u(x)\| \leq M\,\|(x)\|\,,\ \forall\, x \in E\} \end{aligned}$$

(D' après le théorème 2.1.3, u est bornée sur $B_1[0]$.) Quand $E \neq \{0\}$, on peut aussi écrire

$$B = \|u\| = \sup_{\|x\|=1} \|u\,(x)\|$$

Notation : $\|u\|$ au lieu de $\|u\|_{L(E,F)}$.
Montrons que

$$C \leq B \leq A \leq D \leq C$$

$$C \leq B : \forall x \in E,\ x \neq 0,\ \ u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) = \frac{u\,(x)}{\|x\|} \text{ donc } C = \sup \frac{\|u\,(x)\|}{\|x\|} = \sup u\left(\frac{x}{\|x\|}\right) \leq B$$

$B \leq A$: évident

$$A \leq D : \forall M \ \text{ t.q. } \ \|u\,(x)\| \leq M\,\|x\| \ \text{ on a } \ \|x\| \leq 1 \Longrightarrow \|u\,(x)\| \leq M$$

$$\text{donc } A = \sup_{\|x\|\leq 1} \|u\,(x)\| \leq M \ \text{ et donc } \ A \leq \inf\{M\} = D$$

$$D \leq C : \quad \forall x \neq 0 \left\|\frac{u(x)}{\|x\|}\right\| \leq C$$

$$\text{Donc} \quad \forall x \neq 0 \ \ \|u\,(x)\| \leq C\,\|x\|$$

- Remarquons que cette inégalité est encore vraie pour $x = 0$
- Donc $C \in \{M; \|u\,(x)\| \leq M\,\|x\|\}$ et donc $D \leq C$.

Remarque 2.1.4. *Soient E, F, G trois e.v.n. et $u : E \longrightarrow F$, $v : F \longrightarrow G$ deux applications linéaires continues. Alors $v \circ u : E \longrightarrow G$ est linéaire, continue et*

$$\forall x \in E, \|v \circ u\,(x)\| = \|v\,[u\,(x)]\| \leq \|v\|\,\|u\,(x)\| \leq \|v\|\,\|u\|\,\|x\|$$

Alors

$$\|v \circ u\| \leq \|v\|\,\|u\|\,,$$

en vertu de la définition D de la norme.
En général $\|v \circ u\| \neq \|v\|\,\|u\|$. Par exemples soit $E = \mathbb{R}^2$ et u $((resp^t.v)$ la projection sur le 1^{er} $\left((resp^t.le\, 2^{\text{ème}}\right)$ axe de coordonnées.

On a $v \circ u = 0$ et pourtant $\|u\| = \|v\| = 1$.

Théorème 2.1.4. *Si F est un Banach, $L\,(E, F)$ est un Banach.*

Démonstration. Soient $\{u_n\}$ une suite de Cauchy de $L(E,F)$ i.e.

$$\forall \varepsilon \geq 0,\ \exists N \geq 0 \ \text{ tel que } \ n,m \geq N \Longrightarrow \|u_n - u_m\| \leq \varepsilon.$$

Alors

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon &\geq 0,\ \ N \geq 0 \text{ tel que } \ \ n,m \geq N \Longrightarrow \|u_n(x) - u_m(x)\| \\ &= \|u_n - u_m(x)\| \leq \|u_n - u_m\| \, \|x\| \leq \varepsilon \, \|x\| \, \forall x \in E \end{aligned}$$

i.e. $\{u_n(x)\}$ est suite de Cauchy de F et donc converge.
Posons

$$u(x) = \lim_{n \longrightarrow \infty} u_n(x)$$

· <u>u est linéaire</u> :

$$\cdot \ u(x+y) = \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(x+y) = \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(x) + \lim_{n\longrightarrow\infty} u_n(y) = u(x) + u(y)$$

$\cdot\ u(\alpha x) = \alpha u(x)$ de la même manière.
· u est continue :

$$\text{pour } \ \|x\| \leq 1,\ \text{ on a } \ \|u_n(x) - u_m(x)\| \leq \varepsilon, \quad \forall n,m \geq N.$$

Donc la convergence est uniforme sur $B_1[0]$. Or on sait que la limite d'une suite uniformément convergente d'applications continues. Donc u est continue en 0. Donc u est continue sur E (Théorème C).
· $u_n \longrightarrow u$ au sens de la norme sur $L(E,F)$.
Comme

$$\|u_n(x) - u_m(x)\| \leq \varepsilon \, \|x\|$$

et que la norme $\|.\|$ est continue*, on a

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} \|u_n(x) - u_m(x)\| = \|u_n(x) - u(x)\| \leq \varepsilon \, \|x\| \leq \varepsilon, \quad \forall n \geq N, \quad \forall \, \|x\| \leq 1.$$

D'où

$$\|(u_n - u)(x)\| \leq \varepsilon. \text{ Alors } \ \|u_n - u\| = \frac{\sup}{\|x\| \leq 1} \|(u_n - u)(x)\| \leq \varepsilon.$$

$$* \qquad |\|x\| - \|y\|| \leq (x-y) \qquad \forall x,y \in E$$

□

Corollaire 2.1.1 (Définition)**.** *Soit E un e.v.n. $L(E,\mathbb{K})$ est un Banach ; on l'appelle le <u>dual topologique</u> de E. Ses éléments sont appelés <u>formes linéaires continues</u> de E sur $\mathbb{K}$ - On note $E^* = L(E,\mathbb{K})$ ou encore $E' = L(E,\mathbb{K})$.*

Définition 2.1.5. *Une algèbre de Banach A est une algèbre normée complète telle que*

$$\|xy\| \leq \|x\| \, \|y\| \qquad \forall x,y \in A.$$

Définition 2.1.6. *Si $E = F$ on notera $L(E,E) = L(E)$ et tout élément de $L(E)$ est dit opérateur sur $E - L(E)$ est donc une algèbre de Banach.*

Remarque 2.1.5. *1) On a vu, dans le théorème A, que l'addition et la multiplication par un scalaire sont continues. La multiplication est aussi continue :*

$$\text{i.e.} \quad u_n \longrightarrow u, \quad v_n \longrightarrow v \Longrightarrow u_n v_n \longrightarrow uv.$$

En effet :

$$\|u_n v_n - uv\| = \|u_n (v_n - v) + (u_n - u) v\| \leq \|u_n\| \|v_n - v\| + \|u_n - u\| \|v\|$$

2) Cette algèbre est associative, unitaire et :
Si

$$E \neq \{0\}, \ \|i\| = \sup\{\|i(x)\|; \|x\| \leq 1\} = \sup\{\|x\|; \|x\| \leq 1\} = 1.$$

Définition :
Une application u sera dite un isomorphisme de E sur F si elle est linéaire et bijective (i.e. isomorphisme algèbrique) et, en même temps, un homéomorphisme. L'ensemble des isomorphismes de E sur F sera noté $Isom(E,F)$.

Théorème 2.1.5. *Soient*

$$E_1, E_2, ..., E_n, F$$

des e.v.n. et

$$u : E_1 \times E_2 \times ... \times E_n \longrightarrow F$$

une application multilinéaire. Les assertions suivantes sont équivalentes =
(1) *u est continue en tout point de $E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$.*
(2) *u est continue à l'origine $(0, 0, ..., 0)$.*
(3) *$\|u(x_1, x_2, ..., x_n)\|$ est bornée sur $\{(x_1, x_2, ..., x_n); \|x_i\| \leq 1, \quad \forall i\}$.*
(4)

$$\exists M \geq 0 \ \text{t.q.} \ \|u(x_1, x_2, ..., x_n)\| \leq M \|x_1\| \|x_2\| \|...\| \|x_n\|.$$

Démonstration. (1) $\Longrightarrow$ (2) évident
(2) $\Longrightarrow$ (3) Soit

$$B_1(0) = \{y \in F; \|y\| < 1\}$$

la boule unité ouverte de F.
u étant continue à l'origine

$$(0, 0, ...0), \ u^{-1}[B_1(0)] \in \mathcal{V}((0, 0, ..., 0))$$

Alors

$$\exists r > 0 \ \text{ t.q. } \ \|x_i\| \leq r, \quad \forall i \Longrightarrow u\|(x_1, x_2, ..., x_n)\| \leq 1$$

u étant multilinéaire,

$$u(\alpha_1 x_1, ..., \alpha_n x_n) = (\alpha_1 ... \alpha_n) u(x_1, ..., x_n)$$

et alors, si $\|x_i\| \leq 1$, posant

$$y_i = r x_i, \ \text{on a} \ \|y_i\| \leq r, \ \forall i \Longrightarrow \|u(y_1, ..., y_n)\| \leq 1.$$

D'où

$$\|u(x_1, x_2, ..., x_n)\| \leq \frac{1}{r^n}.$$

(3) $\Longrightarrow$ (4) Comme u vérifie (3), soit

$$M \geq 0 \ \text{ t.q. } \ M = \sup_{\|x_i\| \leq 1} \|u(x_1, x_2, ..., x_n)\|.$$

On a alors, quels que soient les x_i :

$$\|u(x_1, x_2, ..., x_n)\| \leq M \|x_1\| \|x_2\| ... \|x_n\|.$$

(Si l'un des $x_i = 0$, l'inégalité est vérifiée ; si $x_i \neq 0, \ \forall i,$ on considère $\frac{x_i}{\|x_i\|}$)

(4) $\Longrightarrow$ (1) Montrons que u est continue en un point arbitraire

$$a_1, a_2, ..., a_n.$$

Comme

$$u(x_1, x_2, ..., x_n) - u(a_1, a_2, ..., a_n) = u(x_1 - a_1, x_2, ..., x_n) +$$
$$+ u(a_1, x_2 - a_2, x_3, ..., x_n) + ... + u(a_1, ..., a_{n-1}, x_n - a_n),$$

on obtient, en appliquant (4).

$$\|u(x_1, x_2, ..., x_n) - u(a_1, a_2, ..., a_n)\| \leq M \|x_1 - a_1\| \|a_2\| ... \|x_n\| +$$
$$+ M \|a_1\| \|x_2 - a_2\| ... \|x_n\| + ... + M \|a_1\| \|a_2\| ... \|a_{n-1}\| \|x_n - a_n\|$$

Si $\|x_i - a_i\| \leq \varepsilon, \ \forall \ i,$ on a $\|x_i\| \leq \|a_i\| + 1, \ \forall \ i.$
Posons $A = \underset{i}{Sup} \{\|a_i\| + 1\}.$

Alors $\|x_i\| \leq A, \ \forall \ i$, et

$$\|u(x_1, x_2, ..., x_n) - u(a_1, a_2, ..., a_n)\| \leq M \ A^{n-1} \sum_{i=1}^{n} \|x_1 - a_1\| \leq M \ A^{n-1} n\varepsilon \leq \varepsilon_0$$

· A peut être choisi indépendamment de ε, mais pas des a_i. Donc continuité non uniformité.

· Si $n > 1$ et u non identiquement nulles u n'est jamais uniformement continue.

$$\text{Posons } \varphi(\lambda) = \lambda a, \quad \varphi : \mathbb{K} \longrightarrow E_1 \times E_2 \times ... \times E_n$$

et posons

$$\theta = u \circ \varphi$$

φ est uniformement et si u était uniformement continue, θ le serait aussi.

Or $\theta(\lambda) = \lambda^n u(a)$. Soient ε et η donnés. Si λ et λ' sont assez grands, on peut avoir, à la fois,

$$|\lambda - \lambda'| \leq \eta \text{ et } |\lambda^n - \lambda'^n| \geq \varepsilon \text{ donc } \|\theta(\lambda) - \theta(\lambda')\| \geq \varepsilon \|u(a_1, ..., a_n)\|$$

Par hypothèse $u \neq 0$ donc $\exists \, a$ tel que $\|u(a)\| \neq 0$.

Posant $\varepsilon' = \varepsilon \|u(a)\|$ on a donc nié la condition de continuité uniforme :

$$\exists \, \varepsilon', \forall \eta > 0 \ \ , \exists \, \lambda, \lambda' \text{ tel que } |\lambda - \lambda'| \leq \eta \text{ et } \|\theta(\lambda) - \theta(\lambda')\| \geq \varepsilon'.$$

□

Définition 2.1.7.

$$L(E_1, E_2, ..., E_n, F)$$

désigne l'ensemble des applications multilinéaires continues

$$u : L(E_1 \times E_2 \times ... \times E_n \longrightarrow F)$$

on pose

$$\|u\| = \sup_{\|x_1\| \leq 1, ... \|x_n\| \leq 1} \|u(x_1, x_2, ..., x_n)\|.$$

D'après (4) *du Théorème E, on a*

$$\|u\| = \inf \{M \geq 0 \text{ tel que } \|u(x_1, ..., x_n)\| \leq M \|x_1\| ... \|x_n\|\}.$$

De façon analogue au théorème D, si F est un Banach, $L(E_1, E_2, ..., F)$ est un Banach.

2.2 E. v. n de dimension finie

Théorème 2.2.1. *Sur un e.v.n .E de dimension finie, toutes les normes sont équivalentes.*

Démonstration. $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ sera une base de E et tout vecteur x de E s'écrira

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i, \quad x^i \mathbb{K}.$$

Nous montrerons que toutes les normes sont équivalentes à une norme, par exemple

$$\|x\|_0 = \sup_i |x^i|.$$

Soit $\|\cdot\|$ une norme sur E. Il faut prouver l'existence de réels

$$a, b > 0 \text{ tel que } a\|x\|_0 \leq \|x\| \leq b\|x\|_0$$

(a)

$$\|x\| = \left\| \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \right\| \leq \sum_{i=1}^{n} |x^i| \|e_i\| \leq \|x\|_0 \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|$$

et la base étant fixée, on peut choisir

$$b = \sum_{i=1}^{n} \|e_i\|.$$

Donc

$$\|x\| \leq b\|x\|_0.$$

(b) Nous prouverons la $1^{ère}$ inégalité par récurrence.

· Si $\dim E = 1$, soit $\{e_1\}$ une base. Alors,

$$\forall x \in E, \ x = x^1 e_1, \ x^1 \in \mathbb{K}$$

$$\|x\| = |x^1| \, \|e_1\| = \|x\|_0 \, \|e_1\|$$

et on peut choisir $a = \|e_1\|$.

· Supposons le théorème vrai pour les $e.v.$ de dimension $\leq n-1$.

· Si $\dim E = n$, considérons l'espace M engendré par les $n-1$ premiers vecteurs de la base :

$$M = [\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}] .$$

De par la récurrences $\|\cdot\| \sim \|.\|_0$ sur y et si $\{y_n\}$ est une suite de Cauchy vis à vis de $\|\cdot\|$, elle est de Cauchy vis à vis de $\|\cdot\|_0$. Considérons le $i - ème$ terme

$$y_i = x_i^1 e_1 + ... + x_i^{n-1} e_{n-1}$$

$$\|y_m - y_{m'}\|_0 = \sup_j |x_m^j - x_{m'}^j| \longrightarrow 0$$

$$\Longrightarrow |x_m^j - x_{m'}^j| \longrightarrow 0 \quad qd \quad m, m' \longrightarrow \infty, \quad \forall \, j = 1, ...,$$

et donc $\{x_m^j\}$ est une suite de Cauchy sur $\mathbb{K}$ complet, donc converge :

$$\exists \, x^1, x^2, ..., x^{n-1} \in \mathbb{K} \;\; \text{tel que} \;\; x_m^j \longrightarrow x^j \quad \forall \, j = 1, 2, ..., n-1.$$

D'après la remarque suivant le théorème 21. A. On a

$$y_m \overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow} y = \sum_{j=1}^{n-1} x^j e_j .$$

D'autre part, d'après (a),

$$y_m \overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow} y \Longrightarrow y_m \overset{\|\cdot\|}{\longrightarrow} y.$$

Donc, sous l'hypothèse de récurrence nous venons de montrer que M est complet (vis à vis de n'importe quelle norme) et donc M est fermé.

En vertu d'un exercice 1.2. l'ensemble $\{e_n\} + M$ est fermé. Il ne contient pas le vecteur nul (car si $0 \in \{e_n\} + M$, on pourrait écrire

$$0 = e_n + \alpha^1 e_1 + ... + \alpha^{n-1} e_{n-1},$$

ce qui est faux). Cela implique que la distance entre 0 et un point x quelconque de $e_n + n$ est strictement positive. i.e.

$$\exists \, C_n > 0 \text{ tel que } \|x\| \geq C_n,$$

ou, en décomposant

$$x : \|e_n + x^1 e_1 + ... + x^{n-1} e_{n-1}\| \geq C_n.$$

D'où

$$\|x^n e_n + x^1 e_1 + ... + x^{n-1} e_{n-1}\| \geq |x^n| \, C_n \quad \forall \; x^n \in \mathbb{K}$$

(car on peut écrire, pour

$$x^n \neq 0, \;\; \left\| e_n + \frac{x^1}{x^n} e_1 + ... + \frac{x^{n-1}}{x_n} e_{n-1} \right\| \geq C_n$$

et pour $x^n = 0$, l'inégalité est évidente).

Si, au lieu de considérer $M = [\{e_1, e_2, ..., e_{n-1}\}]$, on avait considéré

$$M = [\{e_1, e_2, ...e_{i-1}, e_{i+1}, ..., e_n\}],$$

on serait arrivés à

$$\exists\, c_i > 0 \text{ tel que } \left\|x^1 e_1 + ... + x^n e_n\right\| \geq \left|x^i\right| c_i.$$

Cette inégalité est donc vraie pour tout $i = 1, 2, ..., n$. Donc elle est vraie si on remplace $|x_i|$ par $\sup\limits_i |x^i|$ .Alors si

$$x = \sum_{i=1}^{n} x^i e_i \in E,$$

on a

$$\|x\| = \left\|x^1 e_1 + ... + x^n e_n\right\| \geq \sup_i \left|x^i\right| c_i \geq \sup_i \left|x^i\right| .\inf_i C_i.$$

Posant

$$a = \inf_i C_i,$$

on obtient

$$\|x\| \geq \|x\|_0 \cdot a \qquad a > 0.$$

□

Corollaire 2.2.1. *Tout e.v.n. de dimension finie est complet, i.e. est un Banach.*

Corollaire 2.2.2. *Si E est un e.v.n. et si M est un s.e.v. de dimension finie, alors M est fermé.*

Corollaire 2.2.3. *Toute application linéaire définie sur un e.v.n. de dimension finie est continue (donc uniformement continue).*

Démonstration.

$$\|u(x)\| = \left\|\sum_{i=1}^{n} x^i u(e_i)\right\| \leq \sup_i \left|x^i\right| \left(\sum_{i=1}^{n} \|u(e_i)\|\right) = \|x\|_0 M$$

donc u est continue pour $\|\cdot\|_0$ et donc pour toute norme. □

Corollaire 2.2.4. *Si E est un e.v.n. de dimension finie n et si $\{e_1, ..., e_n\}$ est une base de E, l'isomorphisme vectoriel*

$$\left(x^1, ..., x^n\right) \longrightarrow x^1 e_1 + ... + x^n e_n \text{ de } \mathbb{K}^n$$

sur E est un homéomorphisme ***"uniformément continu"****.*

Théorème 2.2.2. *de* <u>*F. Riez*</u> - *Mathématicien Hongrois* - 1880 – 1956.

Soit E un e.v.n. Alors $\dim E < \infty \Longleftrightarrow$ *E est localement compact.*

Démonstration. " $\Longrightarrow$ "$\mathbb{R}^n$ étant localement compact, E l'est aussi.

" $\Longleftarrow$ "E étant localement compact, l'origine 0 a un voisinage dont la fermeture est compacte. Par homothétie, la boule unité fermée $B_1(0)$ est donc compacte $B_1[0]$ est donc compacte $\left(\overline{B_1(0)} = B_1[0] .\text{exo1.1}\right)$.

S'agissant d'espaces métriques, il existe* une suite fini de points a_i $(1 \leq i \leq n)$ tel que

$$B_1[0] \subset \bigcup_{i=1}^{n} B_{1/2}(a_i).$$

Soit M le *s.e.v.* de dimension finie engendré par les a_i. Montrons, par contradiction, que $M = E$.

Supposons que $\exists\, y \in E, \quad y \notin M$. Comme M est fermé (Corollaire 2) , on a $d(y, M) = d > 0$. Par définition de

$$d(y, M), \ \exists\, m_0 \in M \text{ tel que } d \leq \|y - M_0\| \leq \frac{3}{2}d.$$

soit

$$z = \frac{y - m_0}{\|y - m_0\|}.$$

Alors $z \in B_1[0]$ et donc $\exists_i$ tel que $\|z - a_i\| \leq \frac{1}{2}$ or

$$y = m_0 + z\|y - m_0\| = m_0 + a_i\|y - m_0\| + (z - a_i)\|y - m_0\|$$

avec

$$m_0 + a_i\|y - m_0\| = m \in M.$$

Alors

$$y - m = (z - a_i)\|y - m_0\| \text{ et } d = d(y, M) = \inf\{d(y, m)\ ;\ m \in M\}$$

implique

$$d \leq \|z - a_i\|\|y - m_0\|.$$

D'où

$$d \leq \frac{1}{2}\|y - m_0\| \ \ i.e.\ 2d \leq \|y - m_0\|$$

ce qui contedit le choix de m_0, puisque $d \neq 0$. □

Théorème 2.2.3. (X, d) *est compact il* $\Longleftrightarrow$ *est complet et précompact (i.e.* $\forall\, \varepsilon > 0$, $\exists$ *un recouvrement fini de* X *par des boules ouvertes de diamètre* $< \varepsilon$.

2.3 Théorème de Hahn - Banach

Une des astuces pour étudier un système mathématique abstrait est d'examiner l'ensemble de toutes les applications (préservant la structure) de ce système dans un système plus simple du même type. Cela s'est révélé fructueux, par exemples lors de la théorie des représentations de groupes.

Pour ce qui est des *e.v.n.*, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ étant les plus simples, si E est un *e.v.n.*, nous considérons $E' = L(E, \mathbb{K})$.

Le Théorème de Hahn - Banch nous garantit l'existence de nombreuses formes linéaires continues définies sur un $e.v.n.$

Sa démonstration fait appel au Lemme de Zorn.

Rappels :

· Soit P un ensemble muni d'une relation d'ordre (partiel) notée $\leq$. On dit qu'un sous-ensemble $\mathbb{Q} \subset P$ est totalement ordonné si, pour tout couple a, b de $\mathbb{Q}$ on a (au moins l'une des relations $a \leq b$ ou $b \leq a$.

· Soit $\mathbb{Q} \subset P$ un sous-ensemble de P. On dit que $C \in P$ est un majorant de $\mathbb{Q}$ si, pour tout $a \in \mathbb{Q}$, on a $a \leq c$.

· On dit que $m \in P$ est un élément maximal de P si, pour tout $x \in P$ tel que $m \leq x$, on a nécessairement $x = m$.

· On dit que P est inductif si tout sous-ensemble totalement ordonné de P admet un majorant.

· Lemme (Zorn) :
Tout ensemble ordonné, inductif, non vides admet un élément maximal.

Remarque 2.3.1. *Il n'est pas indispensable pour un analyste de connaître la démonstration du lemme de Zorn (à partir de l'axiome du choix). Mais il est essentiel de bien comprendre l'énoncé et de savoir l'utiliser pour établir certains résultats d'existence.*

2.3.1 Le Théorème de Hahn - Banach (Forme analytique)

E désigne un $e.v.$ sur $\mathbb{R}$.

Théorème 2.3.1. *Soit $p : E \longrightarrow \mathbb{R}$ une application vérifiant*

(1)
$$p(\lambda x) = \lambda p(x) \qquad \forall\, x \in E, \qquad \forall\, \lambda > 0$$

(2)
$$p(x+y) \leq p(x) + p(y) \qquad \forall\, x, y \in E$$

p est dite semi-norme

Soit $G \subset E$ un s.e.v. et soit $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire telle que

(3)
$$g(x) \leq p(x) \qquad \forall\, x \in G.$$

Alors il existe une forme linéaire f définie sur E, qui prolonge g i.e. $f(x) = g(x) \quad \forall\, x \in G$ et telle que

(4)
$$f(x) \leq p(x) \qquad \forall\, x \in E.$$

Démonstration. Soit l'ensemble

$$P = \left\{ h \mid \begin{array}{c} h : D(h) \subset E \longrightarrow \mathbb{R} \text{ avec } D(h) \;\; s.ev. \text{ de } E, h \text{ linéaire} \\ G \subset D(h), h \text{ prolonge } g \text{ et } h(x) \leq p(x) \quad \forall\, x \in D(h) \end{array} \right\}$$

P est muni de la relation d'ordre

$$h_1 \leq h_2 \Longleftrightarrow D(h_1) \subset D(h_2)$$

et h_2 prolonge h_1.

$P \neq \phi$ car $g \in P$. D'autre part P est inductif. En effet, soit $\mathbb{Q} \subset P$ un sous ensemble totalement ordonné ; on note $\mathbb{Q} = (h_i)_{i \in I}$. On définit

$$D(h) = \bigcup_{i \in I} D(h_i) \text{ et } h(x) = h_i(x) \text{ si } x \in D(h_i).$$

On vérifie que cette définition a bien un sens, que $h \in P$ et que h est un majorant de $\mathbb{Q}$. D'après le lemme de Zorn, P admet un élément maximal noté f. Prouvons que $D(f) = E$.

Supposons que $D(f) \neq E$. Soit $x_0 \notin D(f)$. Posons

$$D(h) = D(f) + \mathbb{R}x_0$$

et, pour

$$x \in D(f), h(x + tx_0) = f(x) + t\alpha \ \ (t \in \mathbb{R})$$

où α est une constante qui sera fixée utlérieurement de manière à ce que $h \in P$.

On doit donc s'assurer que

$$f(x) + t\alpha \leq p(x + tx_0) \qquad \forall x \in D(f), \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

grâce à 1 il suffit de vérifier que

$$\begin{cases} f(x) + \alpha \leq p(x + x_0) & \forall\, x \in D(f) \\ f(x) - \alpha \leq p(x - x_0) & \forall\, x \in D(f) \end{cases}$$

Autrement dit, choisir α tel que

$$\sup_{y \in D(f)} \{f(y) - p(y - x_0)\} \leq \alpha \leq \inf_{x \in D(f)} \{p(x + x_0) - f(x)\}$$

un tel choix est possible puisque

$$f(y) - p(y - x_0) \leq p(x + x_0) - f(x) \qquad \forall \begin{smallmatrix} x \\ y \end{smallmatrix} \in D(f)$$

en effet

$$f(x) + f(y) = f(x + y) \leq p(x + y) \leq p(x + x_0) + p(y - x_0)$$

grâce à (2).

On conclut que f est majorée par h et que $f \neq h$; ceci contredit la maximalité de f.

□

Corollaire 2.3.1. *Soit G un e.s.v. de E et soit $g : G \longrightarrow \mathbb{R}$ une application linéaire continue, de norme*

$$\|g\|_{G'} = \sup_{\substack{x \in G \\ \|x\| \leq 1}} |g(x)| = \sup_{\substack{x \in G \\ \|x\| \leq 1}} g(x).$$

Alors $\exists\, f \in E'$ qui prolonge g et tel que

$$\|f\|_{E'} = \|g\|_{G'}$$

Démonstration. On applique le théorème 2.3.1 avec

$$p(x) = \|g\|_{G'} \|x\|.$$

□

Corollaire 2.3.2.

$$\forall\, x_0 \in E, \quad \exists\, f_0 \in E' \text{ tel que } \|f_0\| = \|x_0\| \text{ et } f_0\,(x_0) = \|x_0\|^2$$

Démonstration. On applique le Corollaire 2.3.1 avec

$$G = \mathbb{R}x_0 \text{ et } g\,(tx_0) = t\,\|x_0\|^2$$

de sorte que $\|g\|_{G'} = \|x_0\|$.

2.3.2 Le Théorème de Hahn - Banach (Forme géométrique)

E désigne un *e.v.n.* □

Définition 2.3.1. *Un hyperplan (affaire) est un ensemble de la forme*

$$H = \{x \in E \;;\; f\,(x) = \alpha\}$$

où f est une forme linéaire (pas nécessairement continue sur E), non identiquement nulle, et $\alpha \in \mathbb{R}$.

On dit que H est un hyperplan d'équation $[f = \alpha]$.

Proposition 2.3.1. *L'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ est fermé $\Longleftrightarrow$ f est continue.*

Démonstration. $\Longleftarrow$ évident

$\Longrightarrow$ H^c est ouvert et non vide (puisque $f \neq 0$). Soit $x_0 \in H^c$ et supposons que $f\,(x_0) < \alpha$ (on peut supposer $f\,(x_0) > \alpha$. Ce serait pareil)

Soit $r > 0$ tel que

$$B_r\,(x_0) \subset H^c \text{ où } B_r\,(x_0) = \{x \in E; \|x - x_0\| < r\}\,.$$

Alors $(*)$

$$f\,(x) < \alpha \qquad \forall\, x \in B_r\,(x_0)$$

<u>En effet</u>, supposons que $f\,(x_1) > \alpha$ pour un certain

$$x_1 \in B_r\,(x_0)\,.$$

Le segment

$$x_t = (1-t)\,x_1 + tx_0 \;;\; t \in [0,1]$$

est contenu dans $B_r\,(x_0)$ et donc

$$f\,(x_t) \neq \alpha \qquad \forall\; t \in [0,1]\,.$$

Par ailleurs $f\,(x_t) = \alpha$ pour

$$t = \frac{f\,(x_1) - \alpha}{f\,(x_1) - f\,(x_0)},$$

ce qui est absurde.

Il résulte de $(*)$ que

$$f(x_0 + rz) < \alpha \qquad \forall\, z \in B_1\,(0)\,.$$

Par conséquent f est continue et

$$\|f\| \leq \frac{1}{r}\,(\alpha - f\,(x_0))\,.$$

□

Définition 2.3.2. *Soit $A \subset E, B \subset E$. On dit que l'hyperplan H d'équation $[f = \alpha]$ sépare A et B au sens large si*

$$f(x) \leq \alpha \qquad \forall\, x \in A \text{ et } f(x) \geq \alpha \qquad \forall\, x \in B.$$

On dit que H sépare A et B au sens strict s'il existe $\varepsilon > 0$ tel que

$$f(x) \leq \alpha - \varepsilon \qquad \forall\, x \in A \text{ et } f(x) \geq \alpha + \varepsilon \qquad \forall\, x \in B.$$

Théorème 2.3.2. *(1ère forme géométrique)*
Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides et disjoints. On suppose que A est ouvert. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens large.

La démonstration est basée sur les 2 lemmes suivants :

Lemme 2.3.1. *Jauge d'un convexe*
Soit $C \subset E$ un convexe ouvert avec $O \in C$.
Pour tout $x \in E$ on pose

$$p(x) = \inf\left\{\alpha > 0; \alpha^{-1}x \in C\right\}.$$

(On dit que P est la jauge de C).
Alors P vérifie (1) et (2) du Théorème 2.3.1.
De plus (i) $\exists\, M$ tel que $0 \leq p(x) \leq M\|x\| \qquad \forall\, x \in E$
(ii)

$$C = \{x \in E\,;\, p(x) < 1\}.$$

Démonstration. i Soit $r < 0$ tel que $B_r(0) \subset C$. Par définition de P :

$$\frac{x}{p(x)} \in C \text{ et } r \leq \frac{\|x\|}{p(x)} \qquad \forall x \in E$$

ou encore

$$p(x) \leq \frac{1}{r}\|x\| \qquad \forall\, x \in E.$$

(i) C'est évident

(ii) Supposons que $x \in C$; comme C est ouvert, $(1+\varepsilon)x \in C$ pour ε assez petit donc

$$p(x) \leq \frac{1}{1+\varepsilon} < 1$$

Inversement, si

$$p(x) < 1, \qquad \exists\, 0 < \alpha < 1$$

tel que $\alpha^{-1}x \in C$. Donc

$$x = \alpha\left(\alpha x^{-1}\right) + (1-\alpha)\,0$$

(2) Soit $\varepsilon > 0$. D'après (1) et (ii) on sait que

$$\frac{x}{p(x)+\varepsilon} \in C \text{ et } \frac{y}{p(y)+\varepsilon} \in C.$$

Donc

$$\frac{tx}{p(x)+\varepsilon} + \frac{(1-t)\,y}{p(y)+\varepsilon} \in C \qquad \forall t \in [0,1]$$

En particulier pour

$$t = \frac{p(x)+\varepsilon}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \text{ on obtient } \frac{x+y}{p(x)+p(y)+2\varepsilon} \in C$$

grâce à (1) et (ii) on déduit

$$p(x+y) < p(x)+p(y)+2\varepsilon, \quad \forall\, \varepsilon.$$

D'où le résultat. $\square$

Lemme 2.3.2. *Soit $C \subset E$ un convexe ouvert non vide et soit $x_0 \in E$ avec $x_0 \notin C$. Alors*

$$\exists\, f \in E' \text{ tel que } f(x) < f(x_0) \quad \forall\, x \in C.$$

En particulier l'hyperplan d'équation $[f = f(x_0)]$ sépare $\{x_0\}$ et C au sens large.

Démonstration. Par translation on peut toujours supposer que $0 \in C$ et introduire la jauge de C notée p. On considère $G = \mathbb{R}x_0$ et la forme linéaire g définie sur G par

$$g(tx_0) = t, \quad t \in \mathbb{R}.$$

Il est clair que

$$g(x) \leq p(x) \quad \forall\, x \in G$$

(prendre $x = tx_0$ et distinguer les cas $t > 0$ et $t \leq 0$)

Grâce au théorème 3.A, il existe une forme linéaire f sur E, qui prolonge g, et telle que

$$f(x) \leq p(x) \quad \forall\, x \in E.$$

· En particulier, on a

$$f(x_0) = g(1x_0) = 1.$$

On déduit de (ii) que $f(x) < 1$ pour x$\in C$ donc $f(x)f(x_0) \quad x \in C$.

· f est continue grâce à (i). $\square$

<u>*Démonstration du théorème 2.2.1*</u>. :

On pose $C = A - B$ de sorte que C est convexe.

C est ouvert (noter que $C = \bigcup\limits_{y\in B} (A-y)$ et $0 \notin C$ (puisque $A \cap B = \phi$).

D'après le lemme 2, $\exists\, f \in E'$ tel que $f(z) < 0 \quad \forall\, z \in C$

i.e.

$$f(x) < f(y) \quad \forall\, x \in A, \quad \forall\, y \in B.$$

On fixe $\alpha \in \mathbb{R}$ avec

$$\sup_{x\in A} f(x) \leq \alpha \leq \inf_{y\in B} f(y).$$

$\square$

Théorème 2.3.3 (2$^{\text{ème}}$ forme géométrique)**.** *Soient $A \subset E$ et $B \subset E$ deux ensembles convexes, non vides, disjoints. On suppose A fermé, B compact. Alors il existe un hyperplan fermé qui sépare A et B au sens strict.*

Démonstration. Pour $\varepsilon > 0$, on pose

$$A_\varepsilon = A + B_\varepsilon(0)\,,\ B_\varepsilon = B + B_\varepsilon(0)\,.$$

Alors A_ε et B_ε sont convexes, ouverts et non vides. De plus, pour $\varepsilon > 0$ assez petit, A_ε et B_ε sont disjoints. (Sinon on pourrait trouver des suites

$$\varepsilon_n \longrightarrow 0,\ x_n \in A,\ y_n \in B \text{ telles que } \|x_n - y_n\| < 2\varepsilon_n\,;$$

on pourrait ensuite extraire une sous-suite

$$y_n \longrightarrow y \in A \cap B.$$

D'après le théorème 2.3.1, il existe un hyperplan fermé d'équation $[f = \alpha]$ qui sépare A_ε et B_ε au sens large. On a donc

$$f(x + \varepsilon z) \leq \alpha \leq f(y + \varepsilon z) \quad \forall\, x \in A, \quad \forall\, y \in B, \quad \forall\, z \in B_1(0)\,.$$

Il en résulte que

$$f(x) + \varepsilon\,\|f\| \leq \alpha \leq f(y) - \varepsilon\,\|f\| \quad \forall\, x \in A, \quad \forall\, y \in B.$$

On conclut que A et B sont séparés au sens strict par l'hyperplan $[f = \alpha]$, puisque $f \not\equiv 0$

□

Corollaire 2.3.3. *Soit F un s.e.v. tel que $\bar{F} \neq E$. Alors $\exists\, f \in E'$, $f \neq 0$, tel que $f(x) = 0 \quad \forall\, x \in F$.*

Démonstration. Soit

$$x_0 \in E, x_0 \notin \bar{F}.$$

On applique le théorème avec

$$A = \bar{F}, B = \{x_0\}\,.$$

Donc

$$\exists\, f \in E',\ f \neq 0,$$

tel que l'hyperplan d'équation $[f = \alpha]$ séparé, au sens strict,

$$\bar{F} \text{ et } \{x_0\} : f(x) < \alpha < f(x_0) \quad \forall\, x \in F.$$

D'où $f(x) = 0 \quad \forall\, x \in F$ puisque $\lambda f(x) < \alpha$ pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$. □

2.3.3 Théorèmes de l'application ouverte, du graphe fermé, de Banach

Lemme 2.3.3. *Soient E, F deux Banach, $u \in L(E, F)$, surjective.*
Alors

$$\forall\, r > 0, \quad \exists\, \delta > 0 \text{ tel que } B_\delta^F(0) \subset \overline{u\left(B_r^E(0)\right)}.$$

Démonstration. Soit $r > 0$, considérons les boules homothétiques

$$B_r^E(0),\ B_{nr}^E(0) = nB_r^E(0).$$

Posons

$$F_n = \overline{u(nB_r^E(0))} = n\,\overline{u(B_r^E(0))}, \quad n \in \mathbb{N}$$

u étant surjective, $\bigcup_{n=1}^{\infty} Fn = F$ et alors, F étant complet, en vertu du théorème de Baire,

$$\exists\, n_0 \text{ tel que } \bar{F}_{n_0} = n_0\, \overset{0}{\overline{u(B_r^E(0))}} \neq \phi.$$

Par homothétie on peut supprimer n_0

$$\overset{0}{\overline{u(B_r^E(0))}} \neq \emptyset, \quad i.e. \quad \exists\, B_a^F(y_0) \text{ telle que } B_a^F(y_0) \subset \overline{u(B_r^E(0))}.$$

$u\left(B_r^E(0)\right)$ est convexe, symétrique, ainsi que sa fermeture et donc $y_0 \in \overline{u(B_r^E(0))}$.

Or si un ensemble M est convexe, on a $M + M \subset 2M$. Appliquant ce résultat,

$$B_a^F(0) = B_a^F(y_0) - \{y_0\} \subset 2\,\overline{u(B_r^E(0))}$$

ou encore

$$1/_2 B_a^F(0) = B_{\frac{a}{2}}^F(0) \subset \overline{u(B_r^E(0))}.$$

□

Rappel : Théorème de Baire

Soit (X, d) complet. Soit $\{X_n\}_{n\geq 1}$ une suite de fermés tel que

$$\bigcup_{1}^{\infty} X_n = X.$$

Alors $\exists\, n_0$ tel que $\mathring{X}_{n_0} \neq \phi$.

Lemme 2.3.4. *Soient E, F deux Banach, $u \in L(E, F)$ vérifiant*

$$\forall\, r > 0,\ \ 0 \textit{ tel que } B_\delta^F(0) \subset \overline{u(B_r^E(0))} - \textit{Alors } B_{\frac{\delta}{2}}^F(0) \subset u\left(B_r^E(0)\right).$$

Démonstration. Par hypothèse et par homothétie, on a

$$B_{\frac{\delta}{2^n}}^F(0) \subset \overline{u\left(B_{\frac{r}{2^n}}^E(0)\right)}.$$

Posant

$$\delta_n = \frac{\delta}{2^n}, r_n = \frac{r}{2^n}, B_{\delta_n}^E(0) \subset \overline{u\left(B_{r_n}^E(0)\right)}.$$

Soit $y \in B_{\delta_1}^F(0)$, alors

$$y \in \overline{u\left(B_{2_1}^E(0)\right)}$$

et donc

$$\forall\, \delta_2 \geq 0,\ \ \exists\, x_1 \in B_{r_1}^E(0) \text{ tel que } \|y - u(x_1)\| \leq \delta_2.$$

Alors

$$y - u(x_1) \le B^F_{\delta_2}(0) \subset \overline{u\left(B^E_{r_2}(0)\right)}$$

et donc

$$\forall \delta_3 \ge 0, \quad \exists\, x_2 \in B^E_{r_2}(0) \text{ tel que } \|[y - u(x_1)] - u(x_2)\| \le \delta_3$$

etc... on construit ainsi une suite $\{x_n\}$ tel que

$$x_n \in B^E_{r_n}(0) \text{ et } \|[y - u(x_1)] - u(x_2) \ldots - u(x_n)\| \le \delta_{n+1}. \qquad (*)$$

Posons $s_n = \sum_{i=1}^n x_i$. Alors $\{s_n\}$ est une suite de Cauchy car $\|x_n\| < \dfrac{r}{2^n}$.

E étant complet, elle converge vers un point $x \in E$. Mais

$$\|s_n\| \le \sum_{i=1}^n \|x_i\| \le \sum_{i=1}^n \frac{r}{2^i} \le r.$$

Donc

$$\|x\| = \|\lim s_n\| = \lim \|s_n\| \le r \text{ et } x \in B^E_r(0).$$

u étant linéaire et continue, en prenant la limite dans $(*)$, on obtient :

$$\|y - u(x)\| \le 0 \Longrightarrow y = u(x) \Longrightarrow B^F_{\delta_1}(0) . = B^F_{\frac{\delta}{2}} \subset u\left(B^E_r(0)\right).$$

□

Théorème 2.3.4 (de l'application ouverte)**.** *Soient E, F deux Banach, $u \in L(E,F)$ surjective.*

Alors u est une application ouverte.

Démonstration. Soit 0 un ouvert de E.

· $0 = \phi$ - Comme $u(\phi) = \phi, u(\phi)$ est un ouvert.

· $0 \ne \phi$ alors $u(0) \ne \phi$. Par hypothèse tout $y \in u(0)$ est l'image $u(x)$ d'un point $x \in 0$. 0 étant ouvert,

$$\exists\, B^E_r(x) \text{ donc } u\left(B^E_r(x)\right) \subset u(0).$$

Or

$$u(x) + B^F_{\delta/2}(0) \subset u(x) + u\left(B^E_r(0)\right) \text{ ou encore } B^F_{\frac{\delta}{2}} \subset u\left(B^E_r(x)\right).$$

Alors

$$\forall\, y \in u(0), \quad \exists\, B^F_{\delta/2}(y) \subset u(0) \text{ } i.e. \text{ } u(0)$$

est ouvert. □

Corollaire 2.3.4 (Théorème de Banach)**.** *Soient E, F deux Banach, toute application linéaire continue bijective $u : E \longrightarrow F$ est un homéomorphisme.*

Théorème 2.3.5 (du graphe fermé)**.** *Une application linéaire u du dans le Banach F est continue $\Longleftrightarrow$ son graphe est fermé dans $E \times F$.*

Démonstration. Graphe G de u = le sous-ensmble de $E\times F$ fermé par les couples $(x, u(x))$.

$\Longleftarrow$ Soit E *l'e.v.E* "renormé" par $\|x\|' = \|x\| + \|u(x)\|$ (on utilise le même $\|\cdot\|$ pour E et F.

Comme

$$\|u(x)\| \leq \|x\| + \|u(x)\| = \|x\|', \ u : E \longrightarrow F$$

est continue. Donc il suffit de montre que E et E ont la même topologie. L'application identité $i : E \longrightarrow E$ est continue car

$$\|i(x)\| = \|x\| \leq \|x\| + \|u(x)\| = \|x\|'.$$

Si nous parvenons à montrer que E est complet, le corollaire précédent nous garantira que i est un homéomorphisme.

Soit donc $\{x_n\}$ une suite de Cauchy dans E :

$$\forall \varepsilon > 0, \ \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } p, q \geq n \Longrightarrow \|x_p - x_q\|' = \|x_p - x_q\| + \|u(x_p) - u(x_q)\| \leq \varepsilon$$

Alors $\{x_n\}$ et $\{u(x_n)\}$ sont aussi des suites de Cauchy dans E et F, donc convergent et

$$\exists x \in E, \ y \in F \text{ tel que } \lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0, \ \lim_{n\to\infty} \|u(x_n) - y\| = 0.$$

Le graphe G de u étant fermé, on a

$$(x, y) \in G \quad i.e. \quad y = u(x).$$

Le fait que E est complet, résulte de :

$$\|x_n - x\|' = \|x_n - x\| + \|u(x_n - x)\| = \|x_n - x\| + \|u(x_n) - y\| \longrightarrow 0$$

$\Longrightarrow$ Montrons que tout point d'accumulation (x_0, y_0) de G appartient à G. Il existe une suite de points $(x_n, u(x_n))$ de G qui converge vers (x_0, y_0), *i.e.*

$$\|(x_n, u(x_n)) - (x_0, y_0)\| = \|(x_n - x_0, u(x_n) - y_0)\| \longrightarrow 0$$

ou encore

$$\|x_n - x_0\| + \|u(x_n) - y0\| \xrightarrow{\|\cdot\|_1} 0.$$

(Rappel : $\|\cdot\|_1$ = Définition §1) norme définie sur $E \times F$.

Ce qui implique

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0, \ \lim_{n\to\infty} u(x_n) = y_0.$$

Mais u est continue et donc

$$\lim_{n\to\infty} u(x_n) = u(\lim_{n\to\infty} (x_n)) = u(x_0) = y_0 \text{ et donc } (x_0, y_0) \in G.$$

□

Lemme 2.3.5. *Soit E un Banach, soit $u \in L(E)$ tel que $\|u\| < 1$. Alors $i - u$ a un inverse dans l'algèbre de Banach $L(E)$,*

$$(i - u)^{-1} = i + u + u^2 + ... + u^n + ...$$

Démonstration. La série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ est absolument convergente car $\sum_{n=0}^{\infty} \|u_n\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|u\|^n$ avec $\|u\| < 1$.

Soit $v = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$. Comme u commute avec chaque u^n, il commute avec v.

On note $v \circ u = vu$. D'où

$$vu = uv = u \sum_{n=0}^{\infty} u_n = \sum_{n=0}^{\infty} u^{n+1} = \sum_{n=1}^{\infty} u_n = v - i.$$

Donc

$$v\,(i-u) = (i-u)\,v = i$$

et donc

$$v = (i-u)^{-1}.$$

□

Théorème 2.3.6. *Soient E, F deux Banach*

a) $Isom\,(E,F)$ est un ouvert de $L\,(E,F)$

b) L'application $u \longrightarrow u^{-1}$ de $Isom\,(E,F)$ dans $L\,(E,F)$ est continue.

Démonstration. a) · $Isom\,(E,F) = \phi$, c'est un ouvert.

· $Isom\,(E,F) \neq \phi$, soit $u_0 \in Isom\,(E,F)$. Pour tout $u \in L\,(E,F)$, posons

$$u_0^{-1}u = 1 - v : E \longrightarrow E.$$

Alors

$$v = 1 - u_0^{-1}u = u_0^{-1}u_0 - u_0^{-1}u = u_0^{-1}(u_0 - u) \text{ et } \|v\| \leq u_0^{-1}\|u_0 - u\|.$$

Choissons

$$u \in B_{\frac{1}{\|u_0^{-1}\|}}(u_0) \quad \left(\|u_0^{-1}\| \neq 0\right).$$

Alors$\|u - u_0\| \leq \frac{1}{\|u_0^{-1}\|}$. Donc $\|v\| < 1$ et donc $\exists\ (1-v)^{-1}$ en vertu du lemme 2.3.5

or $u = u_0\,(1-v)$ - on obtient

$$\exists\ u^{-1} = (1-v)^{-1}u_0^{-1} \text{ et } u \in Isom\,(E,F)$$

on a bien

$$B_{\frac{1}{\|u_0^{-1}\|}}(u_0) \subset Isom\,(E,F),$$

d'où le résultat.

b)

$$u^{-1} - u_0^{-1} = (i-v)^{-1}u_0^{-1} - u_0^{-1} = \left[(i-v)^{-1} - i\right]u_0^{-1} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} v^n\right)u_0^{-1}$$

$$\left\|u^{-1} - u_0^{-1}\right\| \leq \left\|\sum_{n=1}^{\infty} v^n\right\| \left\|u_0^{-1}\right\| \leq \left[\sum_{n=1}^{\infty} \|v^n\|\right] \left\|u_0^{-1}\right\| \leq \frac{\|v\|}{1-\|v\|}u_0^{-1} \text{ car } \|v\| < 1$$

or

$$v - i - u_0^{-1}u \longrightarrow 0 \text{ si } u \longrightarrow u_0.$$

Donc

$$u^{-1} \longrightarrow u_0^{-1} \text{ si } u \longrightarrow u_0.$$

□

2.3.4 Le théorème de Banach - Steinhaus

Théorème 2.3.7. *Soient E, F deux Banach,*

$$u_i \in L(E,F), i \in I \text{ (non nécessairement dénombrable), tels que}$$

$$\sup_{i \in I} \|u_i(x)\| < \infty \qquad \forall x \in E. \tag{1}$$

Alors

$$\sup_{i \in I} \|u_i\| < \infty \tag{2}$$

autrement dit, $\exists\, C$ constante telle que

$$\|u_i(x)\| \leq C\|x\| \qquad \forall\, x \in E, \quad \forall\, i \in I.$$

Démonstration. · Remarquons d'abord le contenu du théorème : "A partir d'estimations ponctuelles, on déduit une estimation uniforme".

· Pour chaque $n \geq 1$, posons

$$X_n = \{x \in E; \quad \forall \ \in iI, \|u_i(x)\| \leq n\}$$

de sorte que X_n est fermé - grâce à (1) on a

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} X_n = E.$$

Il résulte du théorème de Baire que $\exists\, n_0$ tel que $X_{n_0} \neq \phi$.

Soient donc

$$x_0 \in E, r > 0 \text{ tel que } B_r(x_0) \subset X_{n_0}.$$

Alors

$$\|u_i(x_0 + rz)\| \leq n_0 \quad \forall\, i \in I, \quad \forall\, z \in B_1(0).$$

Par conséquent

$$r\|u_i\| \leq n_0 + \|u_i x_0\|.$$

D'où (2) .. □

2.4 Fonctions numériques semi-continues inférieurement (s.c.i.)

Définition 2.4.1. *On appelle fonction numérique définie sur un ensemble E toute application de E dans $\overline{\mathbb{R}}$*

Notation : $\mathcal{F}(E, \overline{\mathbb{R}})$

Si E est un espace topologique et $\mathcal{V}_E$ une base de voisinages sur E on définit l'adhérence de f suivant $\mathcal{V}_E$ par

$$\bar{f}(\mathcal{V}) = \bigcap_{V \in \mathcal{V}_E} f(V).$$

Comme la famille des $\overline{f(V)}$ possède la propriété de l'$\cap$ finie et comme $\overline{\mathbb{R}}$ est compact, $f(\mathcal{V}_E)$ n'est pas vide dans $\overline{\mathbb{R}}$ et donc on peut définir.

Définition 2.4.2. *On appelle limite supérieure (inférieure) de f suivant la base de voisianges $\mathcal{V}$, la borne supérieure (inférieure) de l'ensemble $\bar{f}(\mathcal{V}_E)$.*

<u>**Notation**</u>,

$$\overline{\lim_{\mathcal{V}_E}} f \text{ ou } \limsup_{\mathcal{V}_E} f, \ \underline{\lim_{\mathcal{V}_E}} f \text{ ou } \liminf_{\mathcal{V}_E} f.$$

<u>Rappel</u> :

· Une famille $\{A_i\}$ d'ensembles possède la propriété de <u>l'intersection finie</u> si toute sous famille <u>finie</u> a une $\cap$ non vide.

· X compact $\Longleftrightarrow$ toute famille $\{F_i\}$ de fermés de X qui possède la propriété de l'$\cap$ finie a, elle même, une $\cap$ non vide.

· $f(A_i) \subseteq \cap f(A_i)$.

Lemme 2.4.1. *Soit f une application d'un espace topologique E dans un compact X. Soit $\mathcal{V}$ une base de voisinages sur E et soit $\bar{f}(\mathcal{V})$. Alors pour tout ouvert ω de X tel que*

$$\bar{f}(\mathcal{V}) \subseteq \omega, \exists V \in \mathcal{V}$$

tel que $\overline{f(V)} \subset \omega$.

Les traces des fermés $\overline{f(V)}$ sur le compact ω^C ont pour intersection $\bar{f}(\mathcal{V}) \cap \omega^C = \emptyset$.

Donc $\exists$ une sous famille <u>finie</u> $\{f(V_i)\}_{i,=1-,n}$ donc l'intersection ne rencontre par ω^C.

Or

$$\exists V \in \mathcal{V} \text{ tel que } V \subset \bigcap_{i=1}^{n} V_i.$$

C'est le V cherché.

<u>Rappel</u> :

Soit E un espace topologique, $f \in \mathcal{F}\left(E, \overline{\mathbb{R}}\right)$

$$f \text{ est continue en } \alpha \in E \Longleftrightarrow \left| \begin{array}{lll} \forall\lambda < f(a), \exists V \in \mathcal{V}_E(a) & \text{tel que} & \lambda < f(V) \\ \forall\lambda > f(a), \exists V' \in \mathcal{V}_E(a) & \text{tel que} & \lambda > f(V') \end{array} \right.$$

quand on ne retient que l'une de ces conditions, on est conduit à la notion de semi-continuité.

Définition 2.4.3. · *Soit E un espace topologique et soit $f \in \mathcal{F}\left(E, \overline{\mathbb{R}}\right)$. On dit que f est s.c.i. en $a \in E$*

si, pour tout

$$\lambda < f(a), \exists V \in \mathcal{V}_E(a) \ \textit{tel que } \lambda < f(V)$$

ou enore

$$f(V) \subset]\lambda, +\infty]$$

· *Lorsque cette condition est réalisée pour tout $a \in E$, f est dite s.c.i. dans E.*

Il <u>est équivalent de dire</u> que pour tout

$$\lambda < f(a), f^{-1}(]\lambda, +\infty])$$

est un voisinage de a.

Remarque 2.4.1. *On dit que $f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ admet un* <u>*minimum relatif en a*</u> *s'il existe $V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $f(x) \geq f(a)$ pour tout $x \in V$.*

Une <u>*telle fonction est s.c.i. en a*</u> *vu que*

$$f(V) \subset [f(a), +\infty].$$

Cette remarque montre : dans des problèmes de minimisation, des hypos de semi-continuité sont naturelles.

Proposition 2.4.1. *f est s.c.i. en*

$$a \Longleftrightarrow f(a) = \underline{\lim}_{x \to \alpha} f(x)$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ Soit $\lambda < f(a)$. Alors $\exists V \in \mathcal{V}(a)$ tel que $\lambda < f(V)$. Alors $\lambda \leq \overline{f(V)}$. D'où $\lambda \leq \underline{\lim}_{x \to a} f(x)$.

Comme cette inégalité a lieu pour tout f.

Mais

$$f(a) \in f(V), \forall V, \text{ donc } f(a) \geq \underline{\lim}_{x \to a} f(x).$$

$\Longleftarrow$ Pour tout $\lambda < f(a)$, il existe, d'après le lemme,

$$V \in \mathcal{V}(a) \text{ tel que } \lambda < f(V).$$

□

Proposition 2.4.2. *f est s.c.i. en*

$$a \Longleftrightarrow \forall \lambda \in \overline{\mathbb{R}}, \{x,\ f(x) \leq \lambda\}$$

est fermé.

f s.c.i. en $a \Longleftrightarrow \forall \lambda < f(a)$, l'ensemble $\{x : \lambda < f(x)\}$ est un voisinage de a.

<u>Exemple</u> :

Soit A une partie d'un espace topologique et soit χ_A la fonction caractéristique de A.

On a

$$\chi_A^{-1}(]\lambda, +\infty[) = \left| \begin{array}{lll} X & \text{si} & \alpha < 0 \\ A & \text{si} & 0 \leq \alpha \leq 1 \\ \phi & \text{si} & 1 \leq \alpha \end{array} \right.$$

Donc χ_A est *s.c.i.* $\Longleftrightarrow$ A est ouvert.

Définition 2.4.4.

$$epi(f) = \left\{(x, y) \in E \times \overline{\mathbb{R}}; y \geq f(x)\right\} =$$

les points de $E \times \overline{\mathbb{R}}$ situés au dessus du graphe de f.

$$\begin{aligned} epi(\sup f_i) &= \bigcap_i epi(f_i) \qquad \forall i \\ epi(\inf\ f_i) &= \bigcup_i epi(f_i) \qquad \textit{quand } I \textit{ est fini} \end{aligned}$$

$(\geq)$ *quand I infini.*

Proposition 2.4.3. *$f : E \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ est s.c.i. $\Longleftrightarrow$ $epi\,(f)$ est fermé dans $E \times \overline{\mathbb{R}}$*

Démonstration. $\Longleftarrow epi\,(f)$ fermé $\Longleftrightarrow C\,(epi\,(f))$ est ouvert *i.e.* voisinage de chacun de ses points.

$\Longrightarrow f$ *s.c.i.*$\Longleftrightarrow$ pour tout couple (a, λ) tel que $\lambda < f\,(a)$ $\quad$ (*i.e.* $(a, \lambda) \in C\,epi\,(f)$) et pour tout μ vérifiant $\lambda < \mu < f\,(a)$ on a $\mu < f\,(x)$ pour tout $x \in V \in \mathcal{V}\,(a)$.

Autrement dit $\Longleftrightarrow \exists$ un voisinage de (a, λ) [qui est $V \times [-\infty, \mu[$] contenu dans $C\,epi\,(f)$.

□

Proposition 2.4.4. *L'enveloppe supérieure $f = \sup\limits_{i \in I} f_i$ de toute famille (f_i) de fonction s.c.i. est s.c.i.*

L'enveloppe inférieure $g = \inf\limits_{i \in I} f_i$ de toute famille finie (f_i).

Conséquence immédiate de 0.2.4 *et des formules qui la précèdent*

$\rightsquigarrow$ L'enveloppe supérieure de toute famille de fonction contenues est s.c.i.

Proposition 2.4.5. *Si E est compact et si f est s.c.i. alors f atteint sa borne inférieure sur E.*

i.e.

$$\exists a \in E \text{ tel que } f\,(a) = \inf_{i \in E} f\,(x)\,.$$

Démonstration. · $\quad$ Posons $m = \inf\limits_{i \in E} f\,(x)$. Pour tout

$$\lambda > m,\ E_\lambda = \{x; f\,(x) \leq \lambda\}$$

est fermé (0.2.3.) et non vide ($\lambda > m$). La famille des E_λ est totalement ordonnée par inclusion car E_λ est fonction $\nearrow$ de λ. Donc (propriété de l'$\cap$ finie pour un compact l'$\cap$ des E_λ n'est pas vide.

En tout point a de cette $\cap$ on a $f\,(a) \leq \lambda$ pour tout $\lambda > m$ d'où $f\,(a) \leq m$.

· $\quad$ Comme $f \geq m$ par definition de m, on a $f\,(a) = m$. □

Corollaire 2.4.1. *Toute fonction s.c.i. d'un compact E dans $]-\infty, +\infty]$ est minorée dans E.*

On a

$$m = f\,(a) > -\infty \text{ donc } f \geq f\,(a) - \infty.$$

On suppose dans la suite que E. est un e.v.n. et on considère

$$\varphi : E \longrightarrow\,]-\infty, +\infty] \text{ et } D\,(\varphi) = \{x \in E;\ \varphi\,(x) < +\infty\}\,.$$

Définition 2.4.5. · $\quad$ *Si φ ne prend jamais la valeur $-\infty$ et si elle n'est pas identique à $+\infty$, elle est dite stricte.*

· $\quad$ *On définit*

$$\varphi^* : E' \longrightarrow\,]-\infty, +\infty] \text{ par } \varphi^*\,(f) = \sup_{x \in E} \left\{f\,(x) - \varphi_{(x)}\right\},\ f \in E'$$

φ^* est dite conjuguée ou duale de φ au sens de Moreau.

· La théorie de ces fonctions duales est fondamentale en Mécanique, en Economie.

· φ^* est convexe, *s.c.i.* sur E' : pour chaque $x \in E$ fixé, l'application $f \rightsquigarrow f(x) - \varphi_{(x)}$ est convexe et continue. Donc l'enveloppe supérieure de ces fonctions (quand x parcourt l'ensemble l'indices E est convexe et *s.c.i.* (voir $\rightsquigarrow$).

· $\varphi \geq f - c \Longleftrightarrow \varphi^*(f) \leq c$ où $c \in \mathbb{R}$ donc la plus petit constante c tel que $f - c \leq \varphi$ est $c = \varphi^*(f)$.

ou encore : la plus grande fonction affine continue "parallèle à f", *i.e.* "de la forme $f - c$", qui soit $\leq \varphi$ est

$$f - \varphi({}^*f) : x \rightsquigarrow f(x) - \varphi^*(f).$$

· φ^* n'est jamais égale à $-\infty \Longleftrightarrow \varphi \not\equiv +\infty$.

Fonctions duales au sens de Moreau

Proposition 2.4.6. *Soit E un e.v.n., $\varphi : E \longrightarrow]-\infty, +\infty]$ tel que $\varphi \not\equiv +\infty$. Alors $\varphi^* \not\equiv +\infty$ convexe s.c.i.*

Démonstration. Soit $x_0 \in D(\varphi)$ et soit $\lambda_0 < \varphi(x_0)$. On applique le théorème de Hahn-Banach (2$^{\text{è}}$ forme géométrique) dans l'espace $E \times \mathbb{R}$ avec $A = epi(\varphi)$ et $B = \{(x_0, \lambda_0)\}$. Il existe donc un hyperplan fermé H dans $E \times \mathbb{R}$ d'équation $[\phi = \alpha]$ qui sépare strictement A et B.

Noter que l'application $x \in E \rightsquigarrow \phi((x, 0))$ est une forme linéaire continue sur E et donc $\phi((x, 0)) = f(x)$ pour un certain $f \in E'$.

Posant $k = \phi((0, 1))$, on a $\phi((x, \lambda)) = f(x) + k\lambda \quad \forall (x, \lambda) \in E \times \mathbb{R}$.

Ecrivant $\phi > \alpha$ sur A et $\phi < \alpha$ sur B, on obtient

$$\text{et} \left| \begin{array}{ll} f(x) + k\lambda > \alpha & \forall (x, \lambda) \in A \\ f(x_0) + k\lambda_0 < \alpha & \end{array} \right.$$

En particulier

$$f(x) + k\varphi(x) > \alpha \quad \forall x \in D(\varphi)$$

et donc

$$f(x_0) + k\varphi(x_0) > \alpha > f(x_0) + k\lambda_0$$

d'où $k > 0$. On déduit

$$-\frac{1}{k} f(x) - \varphi(x) < -\frac{\alpha}{k} \quad \forall x \in D(\varphi).$$

D'où

$$\varphi^* \left(-\frac{1}{k} f \right) < +\infty.$$

□

Définition 2.4.6. *Lorsque $\varphi^* \not\equiv +\infty$, on définit*

$$\varphi^{**} : E \longrightarrow]-\infty, +\infty] \quad \textit{par } \varphi^{**}_{(x)} = \sup_{f \in E'} \{f(x) - \varphi^*(f)\}.$$

Proposition 2.4.7 (Théo. de Fenchel - Moreau)**.** *On suppose convexe, s.c.i., $\varphi \not\equiv +\infty$. Alors $\varphi^{**} = \varphi$.*

Démonstration. **1ère étape** : On suppose $\varphi \geq 0$. D'abord il est clair que $\varphi^{**} \leq \varphi$: en effet ; d'après la définition de φ^* on a

$$f(x) \leq \varphi(x) + \varphi^*(f) \qquad \forall x \in E, \qquad \forall f \in E'.$$

Pour prouver que $\varphi^{**} = \varphi$ on raisonne par l'absurde et on suppose que $\exists x_0 \in E$ tel que

$$\varphi^{**}(x_0) < \varphi(x_0).$$

Eventuellement on a $\varphi(x_0) = +\infty$. Mais on a toujours $\varphi^{**}(x_0) < +\infty$.

On applique le théorème de Hahn Banach, 2ème forme géométrique, dans $E \times \mathbb{R}$ avec

$$A = epi(\varphi) \text{ et } B = \{(x_0, \varphi^{**}(x_0))\}.$$

Il existe donc, comme dans 1.5.1.,

$$f \in E', \ k \in \mathbb{R}, \ \alpha \in \mathbb{R}$$

tel que

(1) $\quad f(x) + k\lambda > \alpha \qquad \forall (x, \lambda) \in epi(\varphi)$

(2) $\quad f(x_0) + k\varphi^{**}(x_0) < \alpha.$

Il en résulte que $k \geq 0$ (choisir dans (1), $x \in D(\varphi)$ et $\lambda = n \longrightarrow \infty$. Ici, on ne peut conclure que $k > 0$. On pourrait avoir $k = 0$, ce qui correspondrait à un hyperplan "Vertical" dans $E \times \mathbb{R}$.

Soit $\varepsilon > 0$. Comme $\varphi \geq 0$, on a grâce à (1) :

$$f(x) + (k + \varepsilon)\varphi(x) \geq \alpha \qquad \forall x \in D(\varphi).$$

D'où

$$\varphi^*\left(-\frac{f}{k+\varepsilon}\right) \leq -\frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

D'après la définition de $\varphi^{**}_{(x0)}$, il vient

$$\varphi^{**}_{(x_0)} \geq -\frac{f(x_0)}{k+\varepsilon} - \varphi^*\left(-\frac{f}{k+\varepsilon}\right) \geq -\frac{f(x_0)}{k+\varepsilon} + \frac{\alpha}{k+\varepsilon}.$$

Par suite

$$f(x_0) + (k+\varepsilon)\varphi^{**}(x_0) \geq \alpha \qquad \forall \varepsilon > 0,$$

ce qui contredit 2.

2ème étape : Soit $f_0 \in D(\varphi^*)$ (d'après la proposition 1.5.1., $D(\varphi^*) \neq \phi$).¨Pour se ramener à la 1ère étape, on introduit

$$\bar{\varphi}(x) = \varphi(x) - f_0(x) + \varphi(^*f_0),$$

de sorte que $\bar{\varphi}$ est convexe, *s.c.i.*, $\infty+$ et $\bar{\varphi} \geq 0$

grâce à la 1ère étape on sait que $(\bar{\varphi})^{**} = \bar{\varphi}$

$$(\bar{\varphi})^*(f) = \sup_{x \in E}\{f(x) - \bar{\varphi}(x)\} = \sup_{f \in E}\{(f(x) - \bar{\varphi}(x)) + f_0(x) - \varphi^*(f_0)\} = \varphi^*(f + f_0) - \varphi^*(f_0)$$

$$(\bar{\varphi})^{**}(x) = \sup_{f \in E'}\{f(x) - (\bar{\varphi})^*(f)\} = \sup_{f \in E'}\{f(x) - \varphi^*(f + f_0) + \varphi^*(f_0)\}$$

$\square$

2.5 Somme directe topologique

Définition 2.5.1. *Etant donné un e.v. E et deux s.e.v. E_1 et E_2 de E, on dit que E est somme directe algébrique de E_1 et E_2, et on écrit $E = E_1 \oplus E_2$ si tout $x \in E$ s'écrit d'une manière et d'une seule sous la forme*

$$x = x_1 + x_2 \text{ où } x \in E_i.$$

· On notera que cette définition est équivalente à la suivante $E_1 \cap E_2 = \{0\}$ et $E_1 \cup E_2$ engendre E.

· L'unicité de la décomposition permet de définir des applications $p_i : E \longrightarrow E_i$ telles que $p_i^{(x)} = x_i$, dites projecteurs de E sur E_i, linéaires surjectives.

Définition 2.5.2. *Un e.v.n. E est la somme directe topologique de deux sous-espaces E_1 et E_2 si E est la somme directe algébrique de E_1 et E_2 et si les projections p_i sont continue.*

· Etant donné que $p_1 + p_2 = i_E$, la continuité de l'un des projecteurs implique celle de l'autre.

· E_1 et E_2 sont nécessairement fermés

$$(E_1 = Ker\, p_2,\ \ E_2 = Ker\ \ p_1)\,.$$

↑ Dans le cas général d'*e.v.t.* on se gardera de croire que des supplémentaires algébriques fermés sont nécessairement des supplémentaires topologiques.

Mais cela est vrai quand E est un Banach (en fait un Frêchet) (T.D. ex 9).

Proposition 2.5.1. *Soit E un e.v.n. somme directe algébrique de deux sous-espaces E_1 et E_2.*

Alors sont équivalents :

(i) La somme directe est topologique

(ii) L'application

$$p : x \rightsquigarrow (p_1(x),\ p_2(x))$$

est un isomorphisme topologique de E sur $E_1 \times E_2$.

(iii) Si π désigne la surjection canonique de E sur $E \diagup E_1$, l'application $\pi|_{E_2}$ est un isomorphisme topologique de E_2 sur $E \diagup E_1$.

Démonstration. (i)$\Longleftrightarrow$(ii) p est une bijection linéaire dont la bijection réciproque

$$(x_1, x_2) \in E_1 \times E_2 \rightsquigarrow x_1 + x_2 \in E$$

est continue en tant que restriction à $E_1 \times E_2$ de l'addition

$$(x, y) \in E \times E \rightsquigarrow x + y \in E.$$

La continuité des applications pi est équivalente à celle de $p = p1, p2$, qui est alors un isomorphisme de

$$E_1 \oplus E_2 \text{ sur } E_1 \times E_2.$$

(i)$\Longleftrightarrow$(iii) La surjection $\pi : E \longrightarrow E \diagup E_1$ étant continue, l'application $\pi \diagup E_2$ est continue.

On observe ensuite que

$$\pi = (\pi|_{E_2}) \circ p_2 : \text{ soit } x = x_1 + x_2, \text{ on a } \pi(x) = \pi(x_2) \text{ et } p_2(x) = x_2.$$

Notons q la bijection réciproque de la bijection $\pi|_{E_2}$.

On a alors $p_2 = q \circ \pi$. La continuité de q équivaut à la continuité de p_2 (évident) ce qui prouve le résultat voulu. □

Corollaire 2.5.1. *Dans E/E_1 est séparé de dimension finie (Si π est la surjection canonique de E sur E_1/E_1, alors l'application π/E_2 est un isomophisme de E_2 sur E_1/E_1).*

L'application linéaire

$$q = (\pi|_{E_2})^{-1} : E/E_1 \longrightarrow E_2$$

est donc continue et on conclut grâce à la proposition 1.6.1.

Remarque 2.5.1. *Si H est un hyperplan fermé (hyperplan $\overset{Def}{\Longleftrightarrow}$ sous-espace de co-dimension 1).*

On en déduit que, pour tout

$$a \in E - H, \quad E = H \oplus \mathbb{K}a$$

où la somme directe est topologique.

On montre facilement que

Tout sous-espace G de dimension finie admet un supplémentaire topologique.

Soit $\{e_1, \ldots, e_n\}$ une base de G. Tout $x \in G$ s'écrit

$$x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i.$$

On pose $\varphi_i(x) = x_i$ et on utilise le corollaire précédent.

Chapitre 3

Topologies Faibles

Sommaire

3.1 Rappels

Soit X un ensemble, soit $(Y_i)_{i\in I}$ une famille d'espaces topologiques. Pour chaque $i \in I$, on se donne une application $\varphi_i : X \longrightarrow Y_i$.

Problème 1 :

Munir X d'une topologie qui rende continues toutes les $(\varphi_i)_{i\in I}$. Si possible la topologie τ la moins fine (la "plus économique").

Soit $\omega_i \subset Y_i$ un ouvert. Alors $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$ est nécessairement un ouvert $\in \tau$.

Quand ω_i décrit la famille des ouverts de Y_i et que i décrit I, les $\varphi_i^{-1}(\omega_i)$ constituent une famille de sous-ensembles de X qui sont nécessairement des ouverts de τ.

Désignons cette famille par $\{U_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$. On est ramené au problème suivant :

Problème 2 :

Construire la famille $\mathcal{F}$ de sous-ensembles de X, la plus économique possible, qui soit stable par $\bigcap\limits_{\text{finie}}$ et $\bigcup\limits_{\text{quelconque}}$ et telle que $U_\lambda \in \mathcal{F}$ pour tout $\lambda \in \Lambda$.

Réponse : On considère d'abord les intersections finies *i.e.* $\bigcap\limits_{\lambda\in\Gamma} U_\lambda$, $\Gamma \subset \Lambda, \Gamma$ fini on obtient ainsi une famille ϕ de sous-ensembles de X, stable par $\bigcap\limits_{\text{finie}}$. On considère ensuite la famille $\mathcal{F}$ des $\bigcup\limits_{\text{quelconques}}$ d'éléments de ϕ.

$\Longrightarrow$ Etant donné $x \in X$, on obtient une base de voisinages de x pour τ en considérant les ensembles de la forme

$$\bigcap_{\text{finie}} \varphi_i^{-1}(V_i) \text{ où } V_i \in \mathcal{V}_{Y_i}(\varphi_i(x)).$$

Rappelons quelques propriétés de cette topologie :

Proposition 3.1.1. *Soit (x_n) une suite de X. Alors*

$$x_n \longrightarrow x \Longleftrightarrow \varphi_i(x_n) \longrightarrow \varphi_i(x) \qquad \forall i \in I..$$

Démonstration. $\Longrightarrow$ Si $x_n \longrightarrow x$ alors

$$\varphi_i(x_n) \longrightarrow \varphi_i(x) \qquad \forall i \in I$$

puisque chaque φ_i est continue.

$\Longleftarrow$ Soit $U \in \mathcal{V}(x)$. D'après ce qui précède, on peut toujours supposer que U est de la forme

$$U = \bigcap_{i \in I} \varphi_i^{-1}(V_i), \quad J \subset I, \quad J \quad \text{fini.}$$

Pour chaque $i \in J$, $\exists N_i$ tel que $\varphi_i(x_n) \in V_i$ pour $n \geq N_i$. Soit $N = \underset{i \in J}{Max} N_i$ on a donc $x_n \in U$ pour $n \geq N$. $\square$

Proposition 3.1.2. *Soit $\mathcal{Z}$ un espace topologique et soit $\psi : \mathcal{Z} \longrightarrow X$.*
Alors ψ est continue $\Longleftrightarrow$ $\varphi_i \circ \psi$ est continue de $\mathcal{Z}$ dans Y_i pour chaque $i \in I$.

Démonstration. $\Longrightarrow$ Evident

$\Longleftarrow$ Soit U un ouvert de X. Montrons que $\psi^{-1}(U)$ est un ouvert de $\mathcal{Z}$.

On sait que U est de la forme $U = \bigcup\limits_{\text{quelconques}} \bigcap\limits_{\text{finie}} \varphi_i^{-1}(\omega_i)$ avec ω_i ouvert de Y_i.

Par conséquent

$$\psi^{-1}(U) = \cup \quad \cap\, \psi^{-1}\left[\varphi_i^{-1}(\omega_i)\right] = \cup\ \cap (\varphi_i \circ \psi)^{-1}(\omega_i)$$

et c'est un ouvert de $\mathcal{Z}$ puisque chaque $\varphi_i \circ \psi$ est continue. $\square$

3.2 Définition et propriétés élémentaires de la topologie faible $\sigma(E, E')$

Il est regrettable que la boule unité d'un Banach E de dimension infinie ne soit pas compacte (Théorème de F. Riesz). On introduit une topologie affaiblie, notée $\sigma(E, E')$ et pour laquelle la boule unité de E (quand E est réflexif et c'est le cas des Hilbert) devient "faiblement" compacte (Théorème de Kakutani).

Définition 3.2.1. *Soit E un Banach, $f \in E'$. On désigne par $\varphi_f :\ E \longrightarrow \mathbb{R}$ l'application $\varphi_f(x) = \langle f, x \rangle$. Lorsque f décrit E' on obtient une famille $(\varphi_f)_{f \in E}$ d'application de E dans $\mathbb{R}$.*

Théorème 3.2.1. $\sigma(E, E')$ *est séparée.*

Démonstration. Soient

$$x_1, x_2 \in E, \ \ x_1 \neq x_2.$$

D'après $H - B$, $2^{\text{ème}}$ forme géométrique, $\exists$ un hyperplan fermé séparant $\{x_1\}$ et $\{x_2\}$ au sens strict, *i.e.*

$$\exists f \in E' \text{ et } \alpha \in \mathbb{R} \text{ tel que } f(x_1) < \alpha < f(x_2)$$

On pose

$$\begin{aligned} 0_1 &= \{x \in E\,;\ f(x) < \alpha\} = \varphi_f^{-1}\left(]-\infty, \alpha[\right) \\ 0_2 &= \{x \in E\,;\ f(x) > \alpha\} = \varphi_f^{-1}\left(]\alpha, +\infty[\right) \end{aligned}$$

Alors

$$0_1,\, 0_2 \in \sigma(E, E') \text{ et } \left| \begin{array}{c} x_1 \in 0_1 \\ x_2 \in 0_2 \\ O_1 \cap 0_2 = \emptyset \end{array} \right.$$

□

Théorème 3.2.2. *Soit $x_0 \in E$. On obtient une base de voisinages de x_0 pour $\sigma(E, E')$ en considérant tous les ensembles de la forme*

$$V = \{x \in E\,;\ |f_i(x - x_0)| < \varepsilon \quad \forall i \in I\} \text{ où } I \text{ est fini, } f_i \in E', \varepsilon > 0.$$

Démonstration. · Il est clair que

$$V = \bigcap_{i \in I} \varphi_{f_i}^{-1}\left(]a_i - \varepsilon,\, a_i + \varepsilon[\right) \text{ avec } a_i = f_i(x_0)$$

est une ouvert de $\sigma(E, E')$ et que $x_0 \in V$.

· Inversement, soit $U \in \mathcal{V}_{\sigma(E,E')}^{(x_0)}$. D'après nos rappels, on sait que un voisiange W de $x_0, \mathbb{W} \subset U$, de la forme $W = \bigcap_{i \in I} \varphi_{f_i}^{-1}(\omega_i)$ où I est fini et ω_i est un voisiange, dans $\mathbb{R}$, de $f_i(x_0) = a_i$ donc

$$\exists\ \varepsilon > 0 \text{ tel que }]a_i - \varepsilon, a_i + \varepsilon[\subset \omega_i$$

pour chaque $i \in I$. Par suite

$$x_0 \in V \subset W \subset U.$$

□

Notation On désigne par $x_n \longrightarrow x$ la convergence de la suite $\{x_n\}$ vers x pour $\sigma(E, E')$ $x_n \longrightarrow x$ la convergence forte (usuelle) *i.e.* $\|x_n - x\| \longrightarrow 0$.

Théorème 3.2.3. *Soit $\{x_n\}$ une suite de E. Alors*

(i) $\left[x_n \overset{\sigma(E,E')}{\rightharpoonup} x\right] \Longrightarrow [f(x_n) \longrightarrow f(x),\quad \forall f \in E']$

(ii) $[x_n \longrightarrow x] \Longrightarrow \left[x_n \overset{\sigma(E,E')}{\rightharpoonup} x\right]$

(iii) $\left[x_n \overset{\sigma(E,E')}{\rightharpoonup} x\right] \Longrightarrow \|x_n\|$ *est borné et* $\|x\| \leq \underline{\lim}\, \|x_n\|$

(iv) *et*

$$\left[\left| \begin{array}{l} x_n \overset{\sigma(E,E')}{\rightharpoonup} \\ f_n \overset{E'}{\longrightarrow} f (i.e.\ \|f_n - f\|_{E'} \longrightarrow 0 \end{array} \right.\right] \Longrightarrow f_n(x_n) \longrightarrow f(x)$$

Démonstration. (i) Résulte de la proposition 2.1.1. et de la définition de $\sigma(E, E')$

(ii) Résulte de (i) puisque

$$|f(x_n) - f(x)| \leq \|f\|\, \|x_n - x\|$$

(iii) On applique l'exercice qui est une conséquence de Banach - Steinhaus. Il suffit donc de vérifier que, sous chaque $f \in E'$ l'ensemble $\{f(x_n)\}$ est borné. Or la suite $\{f(x_n)\}$ converge vers $f(x)$ (en particulier elle est bornée.

Soit $f \in E'$, on a

$$|f(x_n)| \leq \|f\| \|x_n\|$$

et, à la limite,

$$|f(x)| \leq \|f\| \underline{\lim} \|x_n\|.$$

Par conséquent

$$\|x\| = \sup_{\|f\| \leq 1} |f(x)| \leq \underline{\lim} \|x_n\|.$$

(iv)

$$|f_n(x_n) - f(x)| \leq |(f_n - f)(x_n)| + |f(x_n - x)| \leq \|f_n - f\| \|x_n\| + |f(x_n - x)|$$

et on conclut grâce à (i) et (iii). □

Théorème 3.2.4. *Lorsque E est de dimension finie, la topologie faible $\sigma(E, E')$ et la topologie forte coïncident. En particulier*

$$[x_n \longrightarrow x] \Longleftrightarrow [x_n \longrightarrow x]$$

Démonstration. .

· La topologie faible a toujours moins d'ouverts que la topologie forte.

· Inversement, vérifions qu'un ouvert fort est un ouvert faible :

Soit $x_0 \in E$, U un voisinage fort de x_0. I faut construire un voisiange faible V de x_0 tel que $V \subset U$, i.e. il faut trouver une partie <u>finie</u> $(f_i)_{i \in I}$ de E' et $\varepsilon > 0$. tel que

$$V = \{x \in E\,;\, f_i(x - x_0) < \varepsilon, \quad \forall i \in I\} \subset U.$$

Posons que $B_r(x_0) \subset U$. On choisit une base

$$\{e_1, ..., e_n\} \text{ de } E \text{ avec } \|e_i\| = 1, \quad \forall i.$$

Alors tout $x \in E$ s'écrit $x \sum_{i=1}^n = x^i e_i$. Les applications $x \rightsquigarrow x^i$ définissent n formes linéaires, notées f_i, continues sur E. Alors

$$\|x - x_0\| \leq \sum_{i=1}^n f_i(x - x_0) < n\,\varepsilon$$

pour $x \in V$ choisissant $\varepsilon = \dfrac{r}{n}$, on obtient $V \subset U$. □

Théorème 3.2.5. *Soit E un Banach, $C \subset E$ un convexe. Alors C est faiblement ferme pour $\sigma(E, E')$ $\Longleftrightarrow$ il est fortement fermé.*

La démonstration est laissée à titre d'exercice.

3.3 La topologie faible $*\sigma(E', E)$

Soit E un Banach, soit E' son dual muni de la norme duale

$$\|f\| = \sup_{\|x\|\leq 1} |f(x)|, \ x \in E.$$

Soit E'' son bidual, i.e. le dual de E', muni de la norme

$$\|\xi\| = \sup_{\|f\|\leq 1} |\xi(f)\|, \ f \in E'.$$

On définit une injection canonique $J : E \longrightarrow E''$:

Soit $x \in E$ fixé. L'application $f \rightsquigarrow f(x)$ de E' dans $\mathbb{R}$ constitue une forme linéaire continue sur E' i.e. un élément de E'', noté J_x.

On a donc

$$J_x(f) = f(x) \quad \forall x \in E, \quad \forall f \in E'$$

$$\begin{array}{rl|rl} Jx : & E' \longrightarrow \mathbb{R} & J : & E \longrightarrow E'' \\ & f \rightsquigarrow f(x) & & x \rightsquigarrow J_x \end{array}$$

· J est linéaire :

$$J(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = J_{\alpha_1} x_1 + \alpha_2 x_2 \underset{\uparrow}{=} \alpha_1 J_{x_1} + \alpha_2 J_{x_2} = \alpha_1 J(x_1) + \alpha_2 J(x_2)$$

$$J_{\alpha_1} x_1 + \alpha_2 x_2(f) = f(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 f(x_1) + \alpha_2 f(x_2).$$

· J est une isométrie : i.e

$$\|J_x\|_{E''} = \|x\|_E \quad \forall x \in E$$

en effet

$$J_x = \sup_{\|f\|\leq 1} |J_x(f)| = \sup_{\|f\|\leq 1} |f(x)| \underset{\substack{\uparrow \\ 1.1.4}}{=} \|x\|.$$

· J est donc injective, mais pas forcément surjective.

Quand J est surjective, E est dit réflexif.

· E réflexif $\Longrightarrow E$ complet

$$(E'' = L(E', \mathbb{K}))$$

· E complet $\not\Longrightarrow E$ réflexif

$$l_1 = c_0' \ \text{ et } \ l_1' = c_0'' = l_\infty$$

Sur l'espace E' sont déjà définies 2 topologies 1 · La topologie forte (associée à la norme de E') τ_b 2 · L a topologie faible $\sigma(E', E'')$.

On définit une troisième topologie, la topologie faible $*$, notée $\sigma(E', E)$.

Définition 3.3.1. *Pour chaque $x \in E$ on considère l'application*

$$\begin{array}{rl} \varphi_x : & E' \longrightarrow \mathbb{R} \\ & f \rightsquigarrow \varphi_x(f) = f(x) \end{array}$$

Quand x parcourt E, on obtient une famille $(\varphi_x)_{x\in E}$.

$\sigma(E', E)$ est la topologie la moins fine sur E' rendant continues toutes les φ_x.

Comme $E \preceq E''$, il est clair que

$$\sigma\left(E', E\right) \preceq \sigma\left(E', E''\right).$$

Proposition 3.3.1. *On obtient une base de voir d'un point $f \in E'$ pour la topologie $\sigma\left(E', E\right)$ en considérant tous les ensembles de la ferme*

$$V = \{f \in E', \quad |\langle f - f_0, x_i\rangle| < \varepsilon \qquad \forall i \in I\}$$

où I est fini, $x_i \in E$ et $\varepsilon > 0$.

Remarque 3.3.1. *Pourquoi cet acharnement à vouloir appauvrir les topologies ? Si une topologie possède mons d'ouverts, elle possède, par contre, plus de compacts. Or les compacts jouent un rôle fondamental quand on cherche à établir des théorèmes d'existences.*

Théorème 3.3.1. *$\sigma\left(E', E\right)$ est séparée.*

Démonstration. Soient

$$f_1, f_2 \in E' \quad , f_1 \neq f_2.$$

Il existe donc $x \in E$ tel que

$$f_1(x) \neq f_2(x)$$

(par définition de $f_1 \neq f_2$).

Supposons, pour fixer les idées, que

$$f_1(x) < f_2(x).$$

On introduit α tel que

$$f_1(x) < \alpha < f_2(x)$$

On pose

$$\left| \begin{array}{l} 0_1 = \{f \in E' \,;\, f(x) < \alpha\} = \varphi_x^{-1}\left(]-\infty, \alpha[\right) \\ 0_2 = \{f \in E' \,;\, f(x) > \alpha\} = \varphi_x^{-1}\left(]\alpha, +\infty[\right) \end{array} \right.$$

$$\begin{array}{l} 0_1 \\ 0_2 \end{array} \in \sigma\left(E'E\right) \quad f_1 \in 0_1 \quad f_2 \in 0_2 \text{ et } 0_1 \cap 0_2 = \phi.$$

La démonstration est exactement la même que pour le théorème 2.2.2. □

<u>**Notation**</u> : On désigne par $f_n \overset{*}{\longrightarrow} f$ la convergence de la suite $\{f_n\}$ vers f pour la topologie $*\sigma\left(E', E\right)$.

Théorème 3.3.2. *Soit $\{f_n\}$ une suite de E'. Alors*

(i) $\left[f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f\right] \Longleftrightarrow \left[f_n(x) \longrightarrow f(x)\right] \qquad \forall x \in E$

(ii) $\left[f_n \longrightarrow f\right] \Longrightarrow \left[f_n \overset{\sigma(E',E'')}{\rightharpoonup} f\right]$

$\left[f_n \overset{\sigma(E',E'')}{\rightharpoonup} f\right] \Longrightarrow \left[f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f\right]$

(iii) $\left[f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f\right] \Longrightarrow \|f_n\|$ *est borné et* $\|f\| \leq \underline{\lim}\, \|f_n\|$

(iv) $\left[f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f\right] \Longrightarrow \left[f_n(x) \longrightarrow f(x)\right]$

et $\left[x_n \longrightarrow x\right]$

Démonstration. récopier la démonstration du théorème 2.2.3. □

Remarque 3.3.2. *Lorsque E est de dimension finie, les 3 topologies (forte,*

$$\sigma(E', E''), \sigma(E', E)$$

coïncident. En effet J est alors surjective de E sur E'', puisque

$$\dim E = \dim E' = \dim E''.$$

Théorème 3.3.3 (Banach, Alaoglu, Boubaki). *La boule*

$$B^{E'} = \{f \in E' ; \|f\| \leq 1\}$$

est compacte pour la topologie $*\sigma(E', E)$.

On considère l'espace produit $Y = \mathbb{R}^E$; on désigne les éléments de Y par $\omega = (\omega_x)_{x\in E}$ avec $\omega_x \in \mathbb{R}$. L'espace Y est muni de la topologie produit, i.e. la topologie la moins fine sur Y renant continues toutes les applications $\omega \overset{pr}{\rightsquigarrow} \omega_x$

- Dans la suite, on munit E' de la topologie $\sigma(E', E)$.
- On considère l'application

$$\phi : \left| \begin{array}{c} E' \longrightarrow Y \\ f \rightsquigarrow (f(x))_{x\in E} \end{array} \right. , \qquad \phi(f) = (f(x))_{x\in E}$$

- Il est clair que ϕ est continue (noter que, pour chaque $x \in E$ fixé, l'application

$$g : f \rightsquigarrow (\phi(f))_x = f(x) \text{ est continue,)}$$

$$\underbrace{E \xrightarrow{\phi} Y \xrightarrow{pr}}_{g} \mathbb{R}.$$

- Montrons que est un homéomorphisme de E' sur $\phi(E')$

Il est clair que ϕ est injective

Vérifions que ϕ^{-1} est continue.Il suffit (grâce à 2.1.2.) de prouver que, pour tout $x \in E$ fixé, l'application

$$\omega \rightsquigarrow \left(\phi^{-1}(\omega)\right)(x)$$

est continue sur $\phi(E')$.

Ce qui est évident puisque

$$\left(\phi^{-1}(\omega)\right)(x) = \omega_x$$

$$\begin{array}{l} \phi(E') \xrightarrow{\phi^{-1}} E' \longrightarrow \mathbb{R} \\ \quad \omega \underbrace{\rightsquigarrow f \rightsquigarrow}_{pr} f(x) = \omega_x. \end{array}$$

- D'autre part il est clair que $\phi\left(B^{E'}\right) = K$

où

$$K = \{\omega \in Y ; |\omega_x| \leq \|x\|, \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y, \omega_{\lambda x} = \lambda\omega_x, \quad \forall\lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x, y \in E\}.$$

· Il suffit alors de montrer que K est un compact de Y.

Or

$$K = K_1 \cap K_2 \text{ avec } \left| \begin{array}{l} K_1 = \{\omega \in Y \,;\, \omega_x \leq x, \quad \forall x \in E\} = \prod\limits_{x \in E} [-\|x\|, \|x\|] \\ K_2 = \{\omega \in Y \,;\, \omega_{x+y} = \omega_x + \omega_y, \omega_{\lambda x} = \lambda_{\omega x}, \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall x, y \in E\} \end{array} \right.$$

· K_1 est compact (Théorème de Tychonov).

· K_2 est fermé : en effet, pour chaque $\lambda \in \mathbb{R}, x, y \in E$ fixés, les ensembles

$$A_{x,y} = \{\omega \in Y; \omega_{x+y} - \omega_x - \omega_y = 0\}$$
$$B_{\lambda,n} = \{\omega \in Y; \omega_{\lambda n} - \lambda\omega_r = 0\}$$

sont fermés (puisque les applications

$$\omega \longrightarrow \omega_{x+y} - \omega_n - \omega_y \text{ et } \omega \longmapsto \omega_{\lambda x} - \lambda\omega_x$$

sont continues) et

$$K_2 = \left(\bigcap_{x,y \in E} A_{x,y} \right) \cap \left(\bigcap_{\substack{x \in E \\ \lambda \in \mathbb{R}}} B_{\lambda,x} \right).$$

Remarque 3.3.3. *Les topologies*

$$\sigma(E, E'), \sigma\left(E', E''\right), \sigma(E', E)$$

sont localement convexes séparées donc elles jouissent des propriétés des e.v.t.l.c.s.

Entre autres, les théorèmes de Hahn -Banach (formes géométriques) s'appliquent.

3.4 Espaces réflexifs

Soit E un Banach, soient

$$f_1, f_2, ..., f_n \in E', \quad \alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{R}$$

fixés.

Propriété 3.4.1 (Lemme de HELLY). *Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

(i)

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists x_\varepsilon \in E \text{ tel que } \|x_\varepsilon\| \leq 1 \text{ et } |f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon \quad \forall i = 1, 2, ..., n.$$

(ii)

$$\left| \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i \right| \leq \left\| \sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i \right\| \quad \forall \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in \mathbb{R}.$$

Démonstration. (i)$\Longrightarrow$(ii) Fixons $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n$ et posons $S = \sum_{i=1}^{n} |\beta_i|$.

Il résulte de (i) que

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i(x_\varepsilon) - \sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| < S$$

et donc

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\| \|x_\varepsilon\| + \varepsilon S \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\| + \varepsilon S \qquad \forall \varepsilon > 0, \text{ d'où (ii)}$$

$(ii) \Longrightarrow (i)$ Posons

$$\vec{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n) \in \mathbb{R}^n$$

et considérons $\vec{\varphi} : E \longrightarrow \mathbb{R}^n$ définie par

$$\vec{\varphi}(x) = (f_1(x), ..., f_n(x)).$$

La propriété (i) exprime que

$$\vec{\alpha} \in \overline{\varphi(B_1^E[0])}.$$

Supposons le contraire, i.e.

$$\vec{\alpha} \notin \overline{\varphi(B_1^E[0])}.$$

On peut alors séparer strictement dans $\mathbb{R}^n$

$$\{\vec{\alpha}\} \text{ et } \overline{\varphi(B_1^E[0])}$$

i.e.

$$\exists\, \vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n) \in \mathbb{R}^n$$

et $\exists\, \gamma \in \mathbb{R}$ tel que

$$\vec{\varphi}(x) \cdot \vec{\beta} < \gamma < \vec{\alpha} \cdot \vec{\beta}$$

Par conséquent

$$\left|\left(\sum \beta_i f_i\right)(x)\right| < \gamma < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i \qquad \forall x \in B_1^E[0]$$

i.e.

$$\left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\| < \gamma < \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \beta_i,$$

ce n'est pas. □

Lemme 3.4.1. *Soit E un Banach. Alors $J\left(B_1^E[0]\right)$ est dense dans $B_1^{E''}[0]$ par $\sigma(E'', E')$.*

Démonstration. Notons

$$B^{E''} = B_1^{E''}[0].$$

Soit $\xi \in B^{E''}$ et soit

$$V \in \mathcal{V}_{\sigma(E'', E')}(\xi).$$

Prouvons que

$$J\left(B^E\right) \cap V \neq \phi$$

V est de la forme

$$V = \{\eta \in E''; |(\eta - \xi)(f_i)| < \varepsilon, \qquad \forall i = 1, 2, ..., n\}.$$

Il s'agit donc de trouver $x \in B^E$ tel que

$$|f_i(x) - \xi(f_i)| < \varepsilon \qquad \forall i = 1, 2, ..., n.$$

Posons $\alpha_i = \xi(f_i)$ et notons que

$$\forall \beta_1, \beta_2, ..., \beta_n \in \mathbb{R},$$

on a

$$\left|\sum_{i=1}^{n} \beta_i \alpha_i\right| = \left|\xi\left(\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right)\right| \leq \left\|\sum_{i=1}^{n} \beta_i f_i\right\|$$

puisque $\|\xi\| \leq 1$.

D'après le lemme 2.4.1. $\exists x_\varepsilon \in B^E$ tel que

$$|f_i(x_\varepsilon) - \alpha_i| < \varepsilon \qquad \forall i = 1, 2, ..., n$$

i.e.

$$J(x_\varepsilon) \in J\left(B^E\right) \cap V.$$

$\square$

Théorème 3.4.1 (de Kakutani)**.** *Soit E un Banach. Alors E est réflexif $\Longrightarrow$ $B_1^E[0]$ est $\sigma(E, E')$ - compact.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Si E est réflexif alors $J\left(B^E\right) = B^{E''}$. D'après Alaoglu (2.3.4.),est $\sigma(E'', E')$- compact.

Il suffit donc de vérifier que J^{-1} est continue de $(E'', \sigma(E'', E'))$ dans $(E, \sigma(E, E'))$..

D'après (2.1.2.) il reste à prouver que, pour tout $f \in E'$ fixé, l'application $\xi \rightsquigarrow f\left(J_\xi^{-1}\right)$ est continue sur $(E'', \sigma(E'', E'))$.

Or

$$f\left(J^{-1}\xi\right) = \xi(f)$$

$$\{\xi \rightsquigarrow \xi(\ f)\ \text{ est bien continue sur }\ (E'', \sigma(E'', E'))\}.$$

$\Longleftarrow$ Notons d'abord que $J : E \longrightarrow E''$ est continue pour les topologies fortes et donc elle l'est pour les topologies faibles

$$\sigma(E, E') \longrightarrow \sigma\left(E'', E^{''}\right)$$

et a forciori elle l'est . $\square$

Proposition 3.4.1. *Soit E un Banach réflexif et soit $M \subset E$ un s.e.v. fermé. Alors M muni de la norme induite par E est réflexif.*

Démonstration laissée aux soins du lecteur.

Corollaire 3.4.1. *Soit E un Banach. Alors E est réflexif $\Longleftrightarrow$ E est réflexif.*
Démonstration laissée aux soins du lecteur.

Corollaire 3.4.2. *Soit E un Banach réflexif. Soit $K \subset E$ un sous ensemble convexe fermé et borné. Alors K est compact pour $\sigma(E, E')$.*

Démonstration laissée aux soins du lecteur.

Corollaire 3.4.3. *Soit E un Banach réflexif, soit $A \subset E$ un convexe fermé, non vide et soit*

$$\varphi : A \longrightarrow \left]-\infty, +\infty\right]$$

une fonction convexe s.c.i., $\varphi \not\equiv +\infty$ telle que

$$\lim_{\substack{x \in A \\ \|x\| \longrightarrow +\infty}} \varphi(x) = +\infty$$

(aucune hypothèse si A est borné).
Alors atteint son minimum sur A, i.e.

$$\exists x_0 \in A \quad \textit{tel que} \quad \varphi(x_0) = \underset{A}{Min}\varphi.$$

· Démonstration laissée aux soins du lecteur.
· Ce corollaire explique le rôle essentiel joué par les espaces réflexifs et les fonctions convexes en calcul des variations, contrôle optimal,...

Théorème 3.4.2. *Soit E un Banach. Alors E est séparable $\Longleftrightarrow$ $B^{E'}$ est métrisable pour $\sigma(E', E)$.*

Remarquons d'abord que l'espace entier E' n'est jamais métrisable pour $\sigma(E', E)$ sauf en dimension finie.

Démonstration. $\Longrightarrow$ Soit $\{x_n\}_{n\geq 1}$ un sous-ensemble dénombrable dense dans B^E (prendre D dénombrable dense dans E et considérer $B^E \cap D$). Pour $f, g \in B^{E'}$ on définit

$$d(f, g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left|(f - g)(x_n)\right|.$$

Il est clair que d est une métrique.
Montrons que la topologie associée à d coïncide sur $B^{E'}$ avec $\sigma(E', E)$.
a) Soit $f_0 \in B^{E'}$ et soit

$$V \in \mathcal{V}_{\sigma(E',E)}(f_0).$$

Montrons $\exists\, r > 0$ tel que

$$U = \left\{ f \in B^{E'} \ ; \ d(f, f_0) < r \right\} \subset V.$$

On peut supposer V de la forme

$$V = \left\{ f \in B^{E'} \ ; \ \left|(f - f_0)(y_i)\right| < \varepsilon, \qquad \forall i = 1, ..., k \right\}$$

avec, sans restreindre la généralité

$$\|y_i\| \leq 1 \qquad \forall i = 1, ..., k.$$

Puisque la suite $\{x_n\}_{n\geq 1}$ est dense dans B^E, pour chaque i on peut trouver un entier n_i tel que

$$\|y_i - x_{n_i}\| < \frac{\varepsilon}{4}.$$

Fixons $r > 0$ tel que

$$2^{n_i} r < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad \forall i = 1, ..., k$$

et montrons que $U \subset V$:

en effet si $d(f, f_0) < r$, on a

$$\frac{1}{2^{n_i}} |f - f_0(x_{n_i})| < r \qquad \forall i = 1, ..., k$$

et donc

$$|(f - f_0)(y_i)| = |(f - f_0)(y_i - x_{n_i}) + (f - f_0)x_{n_i}| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \forall i = 1, ..., k$$

d'où $f \in V$.

b) Soit $f_0 \in B^{E'}$. Fixons $r > 0$ et montrons

$$\exists V \in V_{\sigma(E',E)}(f_0)$$

dans $B^{E'}$ tel que $V \subset U$

$$U = \left\{ f \in B^{E'} \ ; \ d(f, f_0) < r \right\}.$$

On prend

$$V = f \in B^{E'} \ ; \ |(f - f_0)(x_i)| < \varepsilon, \qquad \forall i = 1, ..., k.$$

On détermine maintenant k et ε pour que $V \subset U$.

Si $f \in V$, on a

$$d(f, f_0) = \sum^{k} \frac{1}{2^n} |f(-f_0)(x_n)| + \sum_{k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} |(f - f_0)(x_n)| < \varepsilon + 2 \sum_{n=k+1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \varepsilon + \frac{1}{2^{k-1}}.$$

On choisit alors $\varepsilon < \frac{r}{2}$ et k assez grand pour que $\frac{1}{2^{k+1}} < \frac{r}{2}$.

$\Longleftarrow$ Soit

$$U_n = \left\{ f \in B^{E'} \ ; \ d(f, 0) < \frac{1}{n} \right\}$$

et soit

$$V_n \in \mathcal{V}_{\sigma(E',E)}(0)$$

tel que $V_n \subset U_n$ on peut supposer que V_n est de la forme

$$V_n = \left\{ f \in B^{E'} \ ; \ |f(x)| \right\} < \varepsilon_n, \qquad \forall x \in \phi_n \text{ où } \phi_n \subset E$$

est un sous ensemble fini.

Notons que $D = \bigcup_{n=1}^{\infty} \phi_n$ est dénombrable.

D'autre part $\bigcap_{n=1}^{\infty} V_n = \{0\}$ et donc

$$[f(x) = 0 \qquad \forall x \in D] \Longrightarrow [f = 0].$$

Donc, l'*e.v.* engendré par D est dense dans E. D'où E est séparable. $\square$

Symétriquement, on a le :

Théorème 3.4.3. *Soit E un Banach. E' est séparable $\Longleftrightarrow$ B^E est métrisable pour $\sigma(E, E')$.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ même démonstration

$\Longleftarrow$ beaucoup plus délicat. (Voir Dunford N - J.T. Schwartz - Lienear operators - Interscience 1958). $\square$

Corollaire 3.4.4. *Soit E un Banach réflexif et soit $\{f_n\}$ une suite bornée dans E'.*

Alors il existe une sous suite extraite $\{f_{n_k}\}$ qui converge pour $\sigma(E', E)$.

Démonstration laissée aux soins du lecteur.

Théorème 3.4.4. *Soit E un Banach réflexif et soit $\{x_n\}$ une suite bornée dans E.*

Alors il existe une sous suite extraite $\{x_{n_k}\}$ qui converge pour $\sigma(E, E')$.

Remarque 3.4.1. *La réciproque de* 3.4.4. *est vraie. Mais délicate (Théo de Eberlein - Smulian).*

Dans un espace métrique, compact $\Longleftrightarrow$ séquentiellement compact.

Définition 3.4.1. *On dit qu'un espace métrique est séparable s'il existe un sous ensemble $D \subset E$ dénombrable et dense.*

Chapitre 4

Espaces de Hilbert

Sommaire

4.1 Généralités

Soit E un *e.v.* sur un corps $\mathbb{K}$ ($\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$). On appelle forme hermitienne sur E, toute application

$$\varphi : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$$

tel que

(1) $\forall y \in E$, l'application $x \rightsquigarrow \varphi(x, y)$ est linéaire sur E.

(2) $\forall x, y \in E$, on a

$$\overline{\varphi(x, y)} = \varphi(y, x)$$

symétrie hermitienne.

Conséquences :

$$\varphi(x, x) \in \mathbb{R}$$

$$\varphi(x, y_1 + y_2) = \overline{\varphi(y_1 + y_2, x)} = \overline{\varphi(y_1, x)} + \overline{\varphi(y_2, x)} = \varphi(x, y_1) + \varphi(x, y_2)$$

$$\varphi(x, \lambda y) = \overline{\varphi(\lambda y, x)} = \overline{\lambda \varphi(y, x)} = \bar{\lambda} \varphi(x, y).$$

Définition 4.1.1. *φ est positive si*

$$\varphi(x, x) \geq 0 \qquad \forall x \in E.$$

φ est définie positive si, en

$$+, \varphi(x, x) > 0 \qquad \forall x \neq 0.$$

Notations :

$$\varphi(x, y) = \langle x \mid y \rangle = \langle x, y \rangle = (x, y) = xy.$$

Théorème 4.1.1. *Soit φ une forme hermitienne positive sur E. Alors*

(1)

$$|\varphi x, y|^2 \leq \varphi(x,x)\,\varphi(y,y)$$

Inégalité de Cauchy - Schwarz.

Si φ est définie positive, l'égalité est vraie seulement si x et y sont linéairement dépendants.

2 L'application

$$x \rightsquigarrow [\varphi(x,x)]^{1/2}$$

est une semi-norme sur E. C'est une norme quand φ est définie positive.

Démonstration. (1) · Si $\varphi(x,y) = 0$, l'inégalité est évidente puisque φ est positive.

· Si

$$\varphi(x,y) \neq 0 \text{ ,soit } \delta = \frac{\varphi(x,y)}{|\varphi(x,y)|}$$

$$\varphi\left(\bar{\delta}x + \lambda y, \bar{\delta}x + \lambda y\right) = \lambda^2\varphi(y,y) + \bar{\delta}\lambda\varphi(x,y) + \bar{\delta}\varphi(y,x) + \delta\bar{\delta}\varphi(x,x), \qquad \forall\lambda \in \mathbb{R}.$$

Mais

$$\delta\bar{\delta} = 1, \bar{\delta}\lambda\varphi(x,y) = \delta\lambda\varphi(y,x) = \lambda|\varphi(x,y)|.$$

Alors

$$\varphi\left(\bar{\delta}x + \lambda y, \bar{\delta}x + \lambda y\right) = \lambda^2\varphi(y,y) + 2\lambda|\varphi(x,y)| + \varphi(x,x).$$

Puisque φ est positive, ce trinôme en λ n'est jamais négatif donc son discriminant est toujours négatif ou nul, ce que donne bien l'inégalité cherchée.

L'égalité s'obtient $\Longleftrightarrow$ le trinôme possède une racine double, i.e. $\exists\lambda$ tel que

$$\varphi\left(\bar{\delta}x + \lambda y, \bar{\delta}x + \lambda y\right) = 0$$

et si φ est définie positive alors $\bar{\delta}x + \lambda y = 0$. Donc x et y sont linéairement dépendants.

(2) Posons

$$p(x) = [\varphi(x,x)]^{1/2}$$

et montrons que px est une semi-norme.

· Il est évident que $[\varphi(x,x)]^{1/2} \geq 0$ et que

$$[\varphi(\lambda x, \lambda x)]^{1/2} = |\lambda|\,[\varphi(x,x)]\,1/2.$$

· Il reste à montrer que

$$p(x+y) \leq p(x) + p(y)$$

ou, en prenant le carré, que

$$\varphi(x+y, x+y) \leq \varphi(x,x) + \varphi(y,y) + 2\,[\varphi(x,x)\,\varphi(y,y)]^{1/2}.$$

Mais

$$\varphi(x+y,x+y) = \varphi(x,x)+\varphi(y,y)+\varphi(y,x)+\varphi(x,y) = \varphi(x,x)+\varphi(y,y)+\underbrace{\overline{\varphi(x,y)} + \varphi(x,y)}_{=2Re(\varphi(x,y))}$$

Donc on a à montrer que

$$Re\,(\varphi\,(x,y)) \leq [\varphi\,(x,x)\,\varphi\,(y,y)]^{1/2}$$

- si $Re\,(\varphi\,(x,y)) = 0$, c'est évident
- si $Re\,(\varphi\,(x,y)) > 0$, on a

$$[Re\,(\varphi\,(x,y))]^2 \leq (\varphi\,(x,y))^2 \leq \varphi\,(x,x)\,\varphi\,(y,y)\,.$$

$\square$

Remarque 4.1.1. *1) p est une norme si, en plus, $p^2\,(x) = \varphi\,(x,x)$ s'nnulle seulement pour $x = 0$ i.e. φ est définie positive.*

2) Avec des normes, l'inégalité de C-S s'écrit

$$|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|\,\|y\|\,.$$

Définition 4.1.2. *Un espace préhilbertien (ou un préhilbert) est un e.v. E muni d'une forme hermitienne φ définie positive et de la norme associée à φ par la relation $\|x\|^2 = \varphi\,(x,x)$.*

On dit que E est un espace de Hilbert si cet e.v.n. est complet.

Remarque 4.1.2. *Les e.v.n. dont la norme dérive d'un produit scalaire sont les espaces euclidiens.*

Les espaces préhilbertiens sont alors pour les formes hermitiennes ce que les espaces euclidiens sont pour les produits scalaires

Rappel : Produit scalaire

$$(u,v) \rightsquigarrow \langle u,,v\rangle \text{ tel que} \left| \begin{array}{ll} (i) & \langle u,\,v\rangle = \langle v,\,u\rangle \\ (ii) & \langle u,\,v+w\rangle = \langle u,\,v\rangle + \langle u,\,w\rangle \\ (iii) & \langle \alpha u,\,v\rangle = \alpha\,\langle u,\,v\rangle \\ (iv) & \langle u,\,u\rangle > 0 \text{ si } u \neq 0 \end{array} \right.$$

Exemples :

1) -

$$E = \mathfrak{C}\,([0,1]\,,\mathbb{R})\,,(x,y) = \int_0^1 |x\,(t)\,y\,(t)|\,dt$$

est un espace préhilbertien réel. Montrons qu'il n'est pas complet.

Soit

$$x_n\,(t) = \inf\left\{n, t^{-\frac{1}{3}}\right\}.$$

La suite $\{x_n\}$ est de Cauchy. En effet.

$$\|x_n - x_{n+p}\|^2 = \int_0^1 [x_n\,(t) - x_{n+p}\,(t)]^2\,dt.$$

Mais

$$|x_n\,(t) - x_{n+p}\,(t)| = 0 \text{ si } t > \frac{1}{n^3}$$

(car

$$t^{-\frac{1}{3}} < n \text{ et } x_n\,(t) = t^{-\frac{1}{3}};$$

a fortiori

$$t - ^{\frac{1}{3}} < n + p \text{ et } x_{n+p}(t) = t^{-\frac{1}{3}})$$

$$\|x_n - x_{n+p}\|^2 = \int_0^{\frac{1}{n^3}} [n - (n+p)]^2 \, dt = p^2 \frac{1}{n^3} \longrightarrow 0$$

quand $n \longrightarrow \infty$.

Cette suite ne converte pas dans E. En effet. $\forall x \in E, \quad \forall n$

$$\|x - x_n\|^2 \int_{\frac{1}{n^3}}^1 [x(t) - x_n(t)]^2 \, dt = \int_{\frac{1}{n^3}}^1 \left[x(t) - t^{-\frac{1}{3}}\right]^2 dt$$

Il en résulte que

$$\lim_{n \longrightarrow \infty} \|x - x_n\| \geq \int_0^1 \left[x(t) - t^{-\frac{1}{3}}\right]^2 dt.$$

Comme $t^{-\frac{1}{3}}$ n'est pas borné sur $]0, 1]$, il existe un compact dans lequel $\left[x(t) - t^{-\frac{1}{3}}\right]^2 > 0$ et alors l'$\int$ de cette fonction est $> 0, \{x_n\} \not\longrightarrow x$.

(Plus précisément, la limite de $\{x_n\}$ serait la fonction $t^{-\frac{1}{3}}$ qui n'appartient pas à E mais à l'espace de Hilbert des fonctions de carré intégrable sur $[0, 1]$).

2) - L'espace l_2^n muni de

$$(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i \, \overline{y_i} \text{ où } \left| \begin{array}{l} x = (x_1, ..., x_n) \\ y = (y_1, ..., y_n) \end{array} \right.$$

3) - L'espace l_2 muni de

$$(x, y) = \sum_{i=1}^\infty x_i \, \overline{y_i} \text{ où } \left| \begin{array}{l} x = (x_1, ..., x_n, ...) \\ y = (y_1, ..., y_n, ...) \end{array} \right.$$

4) - L'espace $L_2(X, \mu)$ muni de

$$(f, g) = \int_X f(x) \, \bar{g}(x) \, d\mu(x).$$

Identités utiles :

1) - Il résulte de l'inégalité de C.S. qur le produit (la forme hermitienne) dans un Hilbert est "doublement" continu(e), i.e.

$$\left. \begin{array}{l} x_n \longrightarrow x \\ y_n \longrightarrow y \end{array} \right) \Longrightarrow (x_n, y_n) \longrightarrow (x, y)$$

En effet

$$\begin{aligned} |(x_n, y_n) - (x, y)| &\leq |(x_n, y_n) - (x_n, y)| + |(x_n, y) - (x, y)| = |(x_n, y_n - y)| + |(x_n - x, y)| \\ &\leq \|x_n\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\| \leq \|x_n - x\| \, \|y_n - y\| + \|x\| \, \|y_n - y\| + \|x_n - x\| \, \|y\|. \end{aligned}$$

2) - L'inégalité de C. S. peut s'écrire

$$|x, y| \leq \|x\| \, \|y\|$$

ou encore

$$|xy|^2 \leq x^2y^2.$$

Si on remarque que, a et b étant des réels,

$$2ab \leq a^2 + b^2,$$

il résulte que

$$2\,|(x,y)| \leq 2\,\|x\|\,\|y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2$$

ou encore (1)

$$2\,|(x,y)| \leq (x,x) + (y,y)$$

D'autre part, nous avons

$$\begin{aligned} (x+y, x+y) &= (x,x) + (y,y) + (x,y) + (y,x) \\ (x-y, x-y) &= (x,x) + (y,y) - (x,y) - (y,x) \end{aligned}$$

Sommons membre à membre : (2)

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$$

qui est la "loi de parallélogramme".

Soustreyons membre à membre (3)

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 2\,[(x,y) + (y,x)]$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ $(x,y) = (y,x)$

$$\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 = 4\,(x,y)$$

- Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ Remplaçons y par iy dans (3) et multiplions par i

$$i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2 = 2\,[(x,y) - (y,x)]$$

et sommons avec (3)

(4)

$$4\,(x,y) = \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\,\|x+iy\|^2 - i\,\|x-iy\|^2$$

(identité de polarisation)

$\Longrightarrow$ La forme hermitienne sur un espace préhilbertien est déterminée par sa norme.

Théorème 4.1.2. *Un sous-ensemble convexe fermé C d'un Hilbert E contient un vecteur unique de plus petite norme : $\exists x_0 \in C$ tel que*

$$\|x_0\| = \inf \|x\|\,; x \in C.$$

Remarque 4.1.3. *Certains auteurs prennent un s.e.v. fermé, hypothèse plus forte.*

Démonstration. · Soit
$$d = \inf \|x\| \, ; x \in C.$$
D'après la définition de la borne inférieure, il existe une suite $\{x_n\}$ de vecteurs dans C tel que $\|x_n\| \longrightarrow d$ (suite dite minimisante).

De par la convexité de C, $\dfrac{x_m + x_n}{2} \in C$ et donc
$$\frac{x_m + x_n}{2} \geq d \text{ ou } \|x_m + x_n\| \, 2d.$$
Utilisant la loi du parallélogramme, on obtient

$$\|x_m - x_n\|^2 = 2\|x_m\|^2 + 2\|x_n\|^2 - \|x_m + x_n\|^2 \leq 2\|x_m\|^2 + 2\|x_n\|^2 - 4d^2 \longrightarrow 0$$

et donc $\{x_n\}$ est une suite de Cauchy dans C (complet car fermé dans E) : $\exists x_0 \in C$ tel que $\{x_n\} \longrightarrow x_0$.

De plus
$$\|x_0\| = \|\lim x_n\| = \lim \|x_n\| = d.$$
· Supposons que $\exists x' x_0$ tel que $\|x'\| = d$. Alors $\frac{x_0+x'}{2} \in C$ et une nouvelle application de la loi du parallélogramme donne :

$$d^2 \leq \frac{x_0 + x'}{2}^2 = \frac{\|x_0\|}{2}^2 + \frac{\|y\|}{2}^2 - \frac{x_0 + x'}{2}^2 < \frac{\|x_0\|}{2}^2 + \frac{\|x'\|}{2}^2 = d^2$$
d'où une contradiction.

Théorème 4.1.3. *Un Banach est un Hilbert $\Longleftrightarrow$ la loi du parallélogramme est vérifiée.*

Démonstration. $\Longrightarrow$ Evident

$\Longleftarrow$ Soit l'application
$$(x, y) \rightsquigarrow a(x, y) = \frac{1}{4}\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2.$$
On a
$$a(x, z) + a(y_1 z) = \frac{1}{4}\left(\|x + z\|^2 - \|x - z\|^2 + \|y + z\|^2 - \|y - z\|^2\right).$$
D'après la loi du parallélogramme
$$= \frac{1}{2}\left(\left\|\frac{x + y}{2} + z\right\|^2 - \left\|\frac{x + y}{2} - z\right\|^2\right) = 2a\left(\frac{x + y}{2}, z\right).$$
Si on prend $y = 0$, on obtient
$$a(x, z) = 2a\left(\frac{x}{2}, z\right).$$
Donc
$$a(x, z) + a(y, z) = a(x + y, z).$$
Par suite, si $\alpha = \dfrac{m}{2^n}, m \in \mathbb{N}$, on a
$$a\left(\frac{m}{2^n}x, y\right) = \frac{m}{2^n}a(x, y)$$

et si $\alpha = \sum_p \frac{m_p}{2^p}$ (somme finie), on a

$$a(\alpha x, y) = \alpha a(x, y).$$

$$\left.\begin{array}{l}\text{L'application } \alpha \rightsquigarrow a(\alpha x, y) \text{ est continue de } \mathbb{R} \text{ dans } \mathbb{R} \\ \text{L'ensemble des } \alpha \text{ de la forme ci-dessus est dense dans } \mathbb{R}.\end{array}\right\} \Longrightarrow \alpha(ax, y) = \alpha a(x, y)$$

$$\forall \alpha \in \mathbb{R}, \quad \forall \underset{y}{x} \in E$$

Comme

$$a(x, y) = a(y, x), \ a : E \times E \longrightarrow \mathbb{R}$$

est une forme $\mathbb{R}$ - bilinéaire, symétrique qui satisfait

$$a(x, x) = \|x\|^2.$$

Ceci montre le théo si $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{R}}$.

Si $\underline{\mathbb{K} = \mathbb{C}}$, on pose

$$h(x, y) = a(x, y) + ia(x, iy)\,; h : E \times E \longrightarrow \mathbb{C}$$

est $\mathbb{R}$ - bilinéaire et $\|x\| = h(x, x)$. De plus

$$h(x, y) = \overline{h(y, x)} \text{ et } h(ix, y) = ih(x, y).$$

Donc h est $\mathbb{C}$ - linéaire par rapport à x.

Définition 4.1.3. *Deux vecteurs x, y d'un préhilbertien (ou d'un Hilbert) sont orthogonaux (Notation : $x \perp y$) si $(x, y) = 0$.*

Soit E un préhilbertien (ou un Hilbert et soit $M \subset E$. On appelle orthogonal de M dans E, l'ensemble

$$M^{\perp} = \{x \in E; (x, y) = 0 \text{ pour tout } y \in M\}.$$

On a $M^{\perp} = \bigcap_{x \in M} \{x\}^{\perp}$. C'est donc un sous-ensemble fermé de E ($\cap$ d'hyperplans fermés : $\{x\}^{\perp} = Kerf$ où $f : y \rightsquigarrow \langle y, x\rangle$ est continue).

Théorème 4.1.4 (de projection)**.** *Soit E un Hilbert et soit M un s.e.v. fermé de E. Il existe deux applications linéaires continues uniques P et $Q : E \longrightarrow E$ tel que*

(a)

$$P(E) \subset M, \ Q(E) \subset M^{\perp} \ \text{ et } \ x = Px + Qx \quad \forall x \in E$$

(b) *si*

$$\left. x \in M, \ Px = x, \ Qx = 0\ ; \quad \text{si } \ x \in M^{\perp}, \ Px = 0, \ Qx = x \right\} \ \text{i.e. } E = M \oplus P$$

(c)

$$\|x - Px\| = \inf\{\|x - y\| \ ; \ y \in M\}, \qquad \forall x \in E$$

(d)

$$\|x\|^2 = \|Px\|^2 + \|Qx\|^2.$$

Définition 4.1.4. *P et Q sont appelées, respectivement, projections orthogonales sur M et $M^{\perp}$.*

Démonstration du théorème4.1.4. (a) · Si $x \in E$, l'ensemble $x+M$ est convexe et fermé (somme d'un compact et d'un fermé)

D'après le théorème B, $\exists$ un élément unique $\underline{z = Qx}$ dans $x+M$ dont la norme soit minimale.

$\underline{\text{Posons } Px = x - z}$ (i.e. $x = Px + Qx$). Puisque $z \in x+M$, on a $Px \in M$ donc $P(E) \subset M$.

Montrons que $z \in M^{\perp}$. Soit $y \in M$, $\|y\| = 1$.

On a

$$(z,z) = \|z\|^2 \leq \|z - \alpha y\|^2 = (z - \alpha y, z - \alpha y) \qquad \forall \alpha \in \mathbb{K}.$$

Donc

$$0 \leq -\alpha (y,z) - \bar{\alpha}(z,y) + |\alpha|^2 .$$

Prenant $\alpha = (z,y)$ on obtient $(z,y) = 0$ i.e. $z \in M^{\perp}$..

· Maintenant si

$$x = x_0 + x_1, \ \ x_0 \in M, \ \ x_1 \in M^{\perp},$$

on a

$$x_0 - Px = Qx - x_1.$$

Comme

$$x_0 - Px \in M \text{ et } Qx - x \in M^{\perp}$$

et comme

$$M \cap M^{\perp} = \{0\},$$

on a

$$x_0 = Px \text{ et } Qx = x_1$$

ce qui montre l'unicité de P et Q.

· On a

$$P(\alpha x + \beta y) - (\alpha Px + \beta Py) = \alpha Qx + \beta Qy - Q(\alpha x + \beta y) = 0$$

(car le 1er membre M, le 2$^{\text{ème}}$ $\in M^{\perp}$) donc P et Q sont linéaires.

(b) Résulte de (a)

(c) Résulte de la définition de P

(d) Résulte de $\langle Px, Qx \rangle = 0$.

De (d) on déduit

$$\|Px\| \leq \|x\|, \|Qx\| \leq \|x\|$$

i.e. P et Q sont continues.

Corollaire 4.1.1. · *Soit E un Hilbert, soit M un s.e.v. fermé de E, $M \subsetneqq E$. Alors $\exists y \in E - \{0\}$ tel que $y \in M^{\perp}$.*

· *Si M est un s.e.v. de E on a $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} = \bar{M}$.*

Démonstration. · Soit $x \in E - M$ on pose $y = Qx$. Comme $x \neq Px$, on a $y \neq 0$.

· D'abord $\left(M^{\perp}\right)^{\perp} \supset \bar{M}$ car $\bar{M}$ est le plus petit fermé contenant M.

Si $x \in \left(M^{\perp}\right)^{\perp} - \bar{M}$ alors

$$\exists y_0 \neq 0, \ \ y_0 \in \left(\bar{M}\right)^{\perp} \subset M^{\perp\perp} - \bar{M}$$

(d'après premier $\cdot$: $x \in E - M \longrightarrow \exists y_{\neq 0} \in M^{\perp} \subset E - M$).

D'où

$$\exists y_{\neq 0} \in \left(M^{\perp\perp} - \bar{M}\right) \cap \left(\bar{M}\right) = M^{\perp\perp} \cap \bar{M}^{C} \cap \bar{M}^{\perp} \underset{\bar{M}^{0} \geq \bar{M}^{\perp}}{\underset{\uparrow}{=}} M^{\perp\perp} \cap \bar{M}^{\perp} \underset{\substack{M \subset \bar{M} \\ M^{\perp} \supset \bar{M}^{\perp}}}{\underset{\uparrow}{\subset}} M^{\perp\perp} \cap M^{\perp} = 1.$$

Ce qui est absurde. $\square$

Théorème 4.1.5 (de Riesz - Fréchet)**.** *Soit E un Hilbert, soit E' son dual.*

Si $u \in E'$, $\exists y \in E$ unique tel que

$$u(x) = (x, y) \qquad \forall x \in E.$$

De plus $\|u\| = \|y\|$.

Démonstration. $\cdot$ Existence :

$\cdot$ Si $u = 0$, on prend $y = 0$

$\cdot$ Si $u \neq 0$, on pose $M = Ker\, u$. M est un s.e.v. fermé de E. D'après le corollaire, $\exists z \in M^{\perp} - \{0\}$.

Nous allons prouver que $\exists \alpha \in \mathbb{K}$ tel que $y = \alpha z$ satisfait le théorème.

Considérons différents types de vecteurs.

(a) Ceux qui sont dans M : $x \in M$. Alors

$$u(x) = 0 = (x, \alpha z) = \bar{\alpha}(x, z) = 0$$

donc pour tous les vecteurs de M, tout multiple de z convient, i.e. reste libre.

(b) Ceux qui sont multiples de z : $x = \beta z$ ($\beta \neq 0$ sinon on serait dans M).

Considérons

$$\begin{cases} u(\beta z) = \beta u(z) \\ (\beta z, y) = (\beta z, \alpha z) = \beta \bar{\alpha}(z, z) \end{cases}$$

Alors

$$u(\beta z) = (\beta z, y) \Longleftrightarrow \beta u(z) = \beta \bar{\alpha}(z, z) \quad \text{i.e . } \alpha = \overline{\frac{u(z)}{\|z\|^{2}}}$$

(c) Les autres : Soit $x \in E$ et considérons $x - \beta z$ où

$$\beta = \frac{u(x)}{u(z)} \longleftarrow \neq 0 \text{car } z \notin M.$$

Alors

$$x(x - \beta z) = u(x) - \beta u(z) = 0 \text{ donc } x - \beta z \in M$$

Ecrivant

$$x = x - \beta z + \beta z,$$

on a

$$u(x) = u(x - \beta z) + u(\beta z).$$

Le 1er terme est dans le cas (a) :

$$u(x - \beta z) = (x - \beta z, \alpha z).$$

Le $2^{\text{ème}}$ terme est dans le cas (b) :

$$u(\beta z) = (\beta z, \alpha z).$$

Remplaçant :

$$u(x) = (x - \beta z, y) + (\beta z, y) = (x, y).$$

· Unicité . Si

$$u(x) = (x, y'), \qquad \forall x,$$

alors

$$(x, y) = (x, y') \qquad \forall x$$

donc

$$(x, y - y') = 0 \qquad \forall x,$$

et donc $y = y'$.

$$\left.\begin{array}{l} \cdot \ \text{On a } \|u\| = \sup\limits_{\|x\|=1} |(x,y)| \le \|y\| \ \text{ d'après l'inégalité de C.S.} \\ \quad \text{D'autre part } \|y\| = \left(\frac{y}{\|y\|}, y\right) \le \sup\limits_{\|x\|=1} |(x,y)| = \|u\| \end{array}\right\} \Longrightarrow \|u\| \, \|y\|$$

□

Remarque 4.1.4. *Le résultat montre que l'application*

$$\left| \begin{array}{c} E \longrightarrow E' \\ y \longleftarrow u_y \end{array} \right. \quad \textit{avec } u_y(x) = (x, y)$$

est surjective : $\forall v \in E', \ \exists y$ *unique* E *tel que*

$$v(x) = (x, y), \qquad \forall x \in E.$$

Il serait agréable qu'elle soit linéaire. Mais on a seulement

$$\left\{ \begin{array}{l} u_{y_1} + y_2 = u_{y_1} + u_{y_2} \\ u_{\alpha_y} = \bar{\alpha} u_y \ \textit{(antilinéarité).} \end{array} \right.$$

Théorème 4.1.6. E' *est un Hilbert. (Son produit scalaire est transporté par celui de* E*).*

Démonstration. On munit E' de

$$(u_x, u_y) = (y, x).$$

Il est évident qu'on obtient un Hilbert
(La complétion est conséquence de

$$\left\| u_{x_p} - u_{y_q} \right\| = \left\| u_{x_p} - y_q \right\| = \| x_p - y_q \|).$$

□

Théorème 4.1.7. *Un Hilbert* E *est réflexif.*

Démonstration. Considérons les 2 applications : $E \longrightarrow E''$

1. L'immersion naturelle d'espaces de Banach $x \rightsquigarrow U_x$ avec $U_x(u) = u(x)$.
2. L'application composée $x \rightsquigarrow u_x \rightsquigarrow U_{u_x}$ où

$$\left| \begin{array}{l} u_x(y) = (y, x) \\ U_{u_x}(u) = (u, u_x). \end{array} \right.$$

· On remarque que la $2^{\text{ème}}$ est surjective car composée de 2 applications surjectives (voir la remarque).

· Montrons qu'elles sont égales :

E étant un Hilbert, si $u \in E'$ alors $u = u_y$ pour un certain $y \in E$ (Théo. E)

Calculons

$$U_x(u) = U_x(u_y) = u_y(x) = (x, y)$$

$$U_{u_x}(u) = U_{u_x}(u_y) = (u_y, u_x) = (x, y)$$

Donc $U_x = U_{u_x}$

et la $1^{\text{ère}}$ application est donc surjective. Comme c'est l'immersion naturelle d'espaces de Banach, alors $E = E''$.

Remarque 4.1.5.

$$(U_x, U_y) = (x, y)$$

en effet

$$U_x = U_{u_x} \not\Longrightarrow (U_x, U_y) = \left(U_{u_x}, U_{u_y}\right) = (u_y, u_x) = (x, y)$$

$$U_y = U_{u_y}.$$

Définition 4.1.5. *Une forme sesquilinéaire sur l' e.v. E est une application $f : E \times E \longrightarrow \mathbb{K}$ tel que*

(a) $f(\lambda x + \mu y, z) = \lambda f(x, z) + \mu f(y, z)$

(b) $f(x, \lambda y + \mu z) = \bar{\lambda} f(x, y) + \bar{\mu} f(x, z) \qquad \forall \underset{z}{\overset{x}{y}} \in E, \qquad \forall \underset{\mu}{\lambda} \in \mathbb{K}.$

Remarque 4.1.6. *Une forme sesquilinéaire est hermitienne si $f(x, y) = \overline{f(y, x)}$.*

On généralise facilement les résultats connus pour une forme linéaire su un e.v.n. à une forme sesquilinéaire :

Théorème 4.1.8. *Si E est un Hilbert et f une fonctionnelle sesquilinéaire de $E \times E$ dans K, les 3 assertions suivantes sont équivalentes :*

(1) f *est continue*

(2) f *est bornée sur toute partie bornée de $E \times E$*

(3) $\exists$ *une constante $M \geq 0$ tel que $\forall_y^x \in E$ on ait*

$$|f(x, y)| \leq M \|x\| \|y\|.$$

Les fonctionnelles sesquilinéaires f continues forment un e.v. normé par

$$\|f\| = \sup_{\substack{\|x\| \leq 1 \\ \|y\| \leq 1}} |f(x, y)| = \inf \{M; |f(x, y)| \leq \|x\| \|y\|\} = \sup_{x \neq 0} |f(x, y)| \overline{\|x\| \|y\|}.$$

Théorème 4.1.9. *2ème théorème de Riez*

Toute forme sesquilinéaire bornée f s'écrit

$$f(x,y) = (A(x), y)$$

où A est un opérateur linéaire borné défini partout dans l'espace de Hilbert E, de manière unique, et tel que $\|A\| = \|f\|$.

Démonstration. Bloquons x. $f(x,y)$ est alors linéaire en y, bornée, définie sur E. D'après le 1er théorème de Riez, $\exists$ un élément h unique défini par f, tel que

$$\overline{f(x,y)} = (y,h) \quad \text{i.e.} \quad f(x,y) = (h,y), \quad \forall$$

A chaque $x \in E$ correspond donc un $h \in H$. Posons $h = A(x)$.

A borné :

$$\|f\| = \sup \frac{|f(x,y)|}{\|x\|\,\|y\|} = \sup \frac{|(Ax,y)|}{\|x\|\,\|y\|} \leq \sup \frac{\|Ax\|\,\|y\|}{\|x\|\,\|y\|}$$

d'après C.S. D'où

$$\|f\| \leq \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = A$$

$$\|f\| = \sup \frac{|(fx,y)|}{\|x\|\,\|y\|\,(y = Ax)} \geq \sup \frac{|(Ax,Ax)|}{\|x\|\,\|y\|} = \sup \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \|A\|$$

A unique :

$$(Ax - A4x, y) = 0 \qquad \forall y \Longrightarrow Ax = A'x \qquad \forall x \Longrightarrow A = A.$$

A linéaire : évident. □

4.2 Le Théorème des bases hilbertiennes

Soit E un préhilbertien. Une famille

$$\{x_\alpha; \alpha \in I\}$$

est dite orthonormée

si $(x_\alpha, x_\beta) = 0$ si $\alpha \neq \beta$ et $(x_\alpha, x_\alpha) = 1$.

Si $x \in E$, on définit une application

$$\hat{x} : I \longrightarrow K \;\; \text{par } \hat{x}(\alpha) = (x, x_\alpha).$$

Les scalaires x s'appellent les coefficients de Fourier de x dans le système orthonormé

$$\{x_\alpha; \alpha \in I\}.$$

On dit que la famille orthonormée

$$S = \{x_\alpha; \alpha \in I\}$$

est complète ou que c'est une base orthonormée si $S^\perp = \{0\}$.

Théorème 4.2.1. *Soit E un Hilbert et soit*

$$S = \{x_\alpha ; \alpha \in I\}$$

une famille orthonormée de E.

Alors il existe une base orthonormée qui contient S.

Démonstration. Soit $\mathcal{S}$ l'ensemble des familles orthonormées de E qui contiennent $\mathcal{S}$.

$\mathcal{S} \neq \phi$ car $S \in \mathcal{S}$. Si $\left\{S_i ; i \in \dot{J}\right\}$ est une famille totalement ordonnée de $\mathcal{S}$ pour l'inclusion, alors $\underset{i \in \dot{J}}{U} S_i \mathcal{S}$. on peut donc appliquer le lemme de Zorn : $\exists T \in \mathcal{S}$ qui est maximal. Si $T^\perp \neq \{0\}$, soit

$$x \in T^\perp - \{0\}, \|x\| = 1.$$

Alors $T \cup \{x\} \in \mathcal{S}$ ce qui contredit la maximalité de T. □

Corollaire 4.2.1. *Si E est un Hilbert ayant un vecteur non nul, il existe dans E une base orthonormée. (Théo des Bases Hilbertiennes).*

Théorème 4.2.2. *Soit E un Hilbert et soit*

$$S = \{x_\alpha ; \alpha \in I\}$$

une famille orthonormée de E.

Pour tout $x \in E$ on a

$$\sum_{\alpha \in I} |\hat{x}(\alpha)|^2 \leq \|x\|^2$$

(inégalité de Bessel).

Démonstration. Soient $\alpha_1, ..., \alpha_n \in I$

$$\left\| x - \sum_{i=1}^n \hat{x}(\alpha_i) x_{\alpha_i} \right\|^2 = \left(x - \sum_{i=1}^n \hat{x}(\alpha_i) x_{\alpha_i}, \; x - \sum_{i=1}^n \hat{x}(\alpha_i) x_{\alpha_i} \right) = \|x\|^2 - \sum_{i=1}^n |\hat{x}(\alpha_i)|^2 .$$

Donc

$$\|x\|^2 \geq \sum_{i=1}^n |\hat{x}(\alpha_i)|^2 .$$

Comme

$$\sum_{\alpha = I}^n |\hat{x}(\alpha_i)|^2 = \sup \left\{ \sum_{i=1}^n |\hat{x}(\alpha_i)|^2 ; n \in \mathbb{N}, \;\; \alpha_1, ..., \alpha_n \in I \right\}$$

on a

$$\|x\|^2 \geq \sum_{\alpha \in I} |\hat{x}(\alpha_i)|^2 .$$

□

Théorème 4.2.3. *Soit E un Hilbert et soit $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ une base orthonormée de E. Alors*

(a)

$$\|x\|^2 = \sum_{\alpha \in I} |\hat{x}(\alpha)|^2$$

(b)

$$(x, y) = \sum_{\alpha \in I} \hat{x}(\alpha)\ \overline{\hat{y}(\alpha)}$$

(égalité de Parseval)

(c) La famille

$$\{\hat{x}(\alpha)\ x_\alpha; \alpha \in I\}$$

est sommable dans E et

$$\sum_{\alpha \in I} \hat{x}(\alpha)\, x_\alpha = x$$

(série de Fourier de x)

(d) Le s.e.v. engendré par la famille $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ est dense dans E.

Démonstration. (d) Soit M l'adhérence du s.e.v. engendré par $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$. Si $M \neq E$, il existe, d'après le Corollaire du Théo D,

$$y \in M^\perp - \{0\}$$

ce qui contredit le fait que $\{x_\alpha; \alpha \in I\}$ est une base orthonormé (relire la Définition).

(c) Si

$$x \in E \text{ et } \varepsilon > 0, \quad \exists \lambda_1, ..., \lambda_n \in \mathbb{K} \text{ et } \alpha_1, ..., \alpha_n \in I$$

tel que

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\alpha_i} \right\| < \varepsilon.$$

Or

$$\begin{aligned}
\left\| x - \sum_{\alpha \in I}^{n} \lambda_i x_{\alpha_i} \right\|^2 &= \left(x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\alpha_i}, x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\alpha_i} \right) \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \hat{x}(_{\alpha_i}) - \sum_{i=1}^{n} \overline{\lambda_i} \hat{x}_{(\alpha_i)} + \sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^2 \\
&= \|x\|^2 - \sum_{i=1}^{n} |\hat{x}(_{\alpha_i})|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i - \hat{x}_{(\alpha_i)}\right|^2 \\
&= \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \hat{x}(_{\alpha_i})\, x_{\alpha_i} \right\|^2 + \sum_{i=1}^{n} \left|\lambda_i - \hat{x}_{(\alpha_i)}\right|^2
\end{aligned}$$

Donc

$$\left\| x - \sum_{i=1}^{n} \hat{x}(_{\alpha_i})\, x_{\alpha_i} \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \lambda_i x_{\alpha_i} \right\| \leq \varepsilon.$$

Soit maintenant J fini $\subset I$ tel que $\alpha_1, ..., \alpha_n \in J$. L'inégalité précédente implique

$$\left\| x - \sum_{\alpha \in J} \hat{x}(\alpha_i)\, x_\alpha \right\| \leq \left\| x - \sum_{i=1}^{n} \hat{x}(\alpha_i)\, x_{\alpha_i} \right\| \leq \varepsilon.$$

Donc la famille $\{\hat{x}(\alpha)\ x_\alpha;\ \alpha \in I\}$ est sommable et $x = \sum_{\alpha \in I} \hat{x}(\alpha)\, x_\alpha$.

(a) De plus

$$\|x\|^2 - \sum_{\alpha \in J} |\hat{x}(\alpha)|^2 = \left\| x - \sum_{\alpha \in J} \hat{x}(\alpha)\, x_\alpha \right\| \leq \varepsilon \text{ donc } \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in I} |\hat{x}(\alpha)|^2 .$$

(b) On a

$$(x, y) = \left(\sum_{\alpha \in I} \hat{x}(\alpha)\,,\ \sum_{\beta \in I} \hat{y}(\beta)\, x_\beta \right).$$

D'après l'inégalité de C-S,

$$|(x - x', y - y')| \leq \|x - x'\| \, \|y - y'\|$$

et donc l'application $\{x, y\} \rightsquigarrow (x, y)$ est continue de $E \times E$ dans E et donc

$$(x, y)\, \|x\|^2 - \sum_{\alpha \in I} \sum_{\beta \in I} \hat{x}(\alpha)\, \overline{\hat{y}(\beta)} = (x_\alpha, x_\beta) = \sum_{\alpha \in I} \hat{x}(\alpha)\, \overline{\hat{y}(\alpha)}.$$

□

Théorème 4.2.4. *Soit I un ensemble. Pour tout $\alpha \in I$, soit H_α un Hilbert sur $\mathbb{K}$ dont le produit scalaire est noté $(,)_\alpha$ et la norme $\|\cdot\|_\alpha$*

Soit

$$\hat{\bigoplus_{\alpha \in I}} H_\alpha = \left\{ x = (x_\alpha)_{\alpha \in I} \in \prod_{\alpha \in I} H_\alpha ; \sum_{\alpha \in I} \|x_\alpha\|_\alpha^2 < +\infty \right\}$$

(a) L'ensemble $\hat{\bigoplus}_{\alpha \in I} H_\alpha$ est un s.e.v. de $\prod_{\alpha \in I} H_\alpha$

(b) Si $x, y \in \hat{\bigoplus}_{\alpha \in I} H_\alpha$, la famille $\{(x_\alpha, y_\alpha)_\alpha\,; \alpha \in I\}$ est absolument sommable.

(c) L'application

$$(x, y) \rightsquigarrow (x, y) = \sum_{\alpha \in I} (x_\alpha, y_\alpha)_\alpha$$

est un produit scalaire défini positif sur $\hat{\bigoplus}_{\alpha \in I} H_\alpha$, pour lequel c'est un Hilbert sur $\mathbb{K}$.

Définition 4.2.1. · *L'espace $\hat{\bigoplus}_{\alpha \in I} H_\alpha$ est appelé <u>somme directe hilbertienne</u> de la famille $(H_\alpha)_{\alpha \in I}$.*

· *Si $I = \{1, 2, ..., n\}$ on écrit $H_1 \oplus ... \oplus H_n$.*

. *Si $H_\alpha = \mathbb{K}$, pour tout $\alpha \in I$, on note $l^2_{\mathbb{K}}(I) = \hat{\bigoplus}_{\alpha \in I} H_\alpha$.*

Démonstation du théorème 4.2.4. (a) Soit $H = \hat{\bigoplus}_{\alpha \in I} H_\alpha$ et soient $x, y \in H$. on a

$$\begin{aligned} \sum_{\alpha\in I} \|x_\alpha + y_\alpha\|_\alpha^2 &\leq \sum_{\alpha\in I} \left(\|x_\alpha\|_\alpha + \|y_\alpha\|_\alpha\right)^2 \leq 2\sum_{\alpha\in I}\left(\|x_\alpha\|_\alpha^2 + \|y_\alpha\|_\alpha^2\right) \\ &= 2\sum_{\alpha\in I}\|x_\alpha\|_\alpha^2 + 2\sum_{\alpha\in I}\|y_\alpha\|_\alpha^2 < +\infty \\ \sum_{\alpha\in I}\|\lambda x_\alpha\|_\alpha^2 &= |\lambda|^2 \sum_{\alpha\in I}\|x_\alpha\|_\alpha^2 < +\infty, \qquad \forall \lambda \in \mathbb{K} \end{aligned}$$

Donc H est un s.e.v.

(b) En appliquant l'inégalité de Cauchy-Shwartz, on a

$$\sum_{\alpha\in I} |(x_\alpha, y)_\alpha| \leq \sum_{\alpha\in I} \|x_\alpha\|_\alpha \|y_\alpha\|_\alpha^2 \leq \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in I} \|x_\alpha\|_\alpha^2 + \|y_\alpha\|_\alpha^2 < +\infty$$

(c) · Il est clair que $(,)$ est un produit scalaire

· Si $(x, x) = 0$ alors $(x_\alpha, x_\alpha)_\alpha = 0$ pour tout $\alpha \in I$ donc $x_\alpha = 0$ i.e. $x = 0$

· On pose $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. Il reste à montrer que H est complet.

Soit $\{x_n\}$.une suite de Cauchy dans H.

Pour tout $\varepsilon^2 > 0$, $\exists m_0$ tel que

$$p, q \geq m_0 \Longrightarrow \sum_{\alpha\in I} \|x_{p,\alpha} - x_{q,\alpha}\|_\alpha^2 \leq \varepsilon^2.$$

Donc, pour tout $\alpha \in I$, on a

$$\|x_{p,\alpha} - x_{q,\alpha}\|_\alpha^2 \leq \varepsilon^2.$$

La suite $\{x_{n,\alpha}\ ;\ n \geq 0\}$ est donc suite de Cauchy dans H_α.

Elle a une limite $y_\alpha \in H_\alpha$.

D'après l'inégalité $*$ on a, pour tout sous-ensemble fini

$$J \subset I, \qquad \sum_{\alpha\in J} \|x_{p,\alpha} - y_{q,\alpha}\|_\alpha^2 \leq \varepsilon^2.$$

D'après la continuité de la norme $\|.\|_\alpha$ dans H_α, on a donc

$$\sum_{\alpha\in J} \|x_{p,\alpha} - y_q\|_\alpha^2 \leq \varepsilon^2$$

tout $p \geq m_0$. Comme ceci est vrai pour toute partie finie $J \subset I$, on a.

$$\sum_{\alpha\in I} \|x_{p,\alpha} - y_\alpha\|_\alpha^2 \leq \varepsilon^2$$

Ce qui montre que $(x_{p,\alpha} - y_\alpha)_{\alpha\in I}$ est un élément de H.

Par suite $y = (y_\alpha)_{\alpha\in I}$ est un élément de H et

$$\|x_p - y\|^2 \leq \varepsilon^2 \text{ si } p \geq m_0.$$

$\square$

Définition 4.2.2. *Soient E, F deux Hilbert sur $\mathbb{K}$, on appelle isomorphisme d'espaces de Hilbert de E sur F, une application linéaire bijective $u : E \longrightarrow F$ tel que, pour tout $x \in E$, on a $\|u(x)\| = \|x\|$.*

Comme

$$\begin{aligned} 4(x,y) &= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 && si\ \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ 4(x,y) &= \|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2 && si\ \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{aligned}$$

On a

$$(u(x), u(y)) = (x,y).$$

Théorème 4.2.5. *Soit E un Hilbert sur $\mathbb{K}$, non réduit à $\{0\}$. Alors $\exists$ un ensemble I tel que $\exists$ un ismorphisme d'espaces de Hilbert de E sur $l^2_{\mathbb{K}}(I)$.*

Démonstration. Soit $\{x_\alpha\}_{\alpha\in I}$ une base orthonormée de E.

Alors, d'après le théo. C, l'application $x \rightsquigarrow (\hat{x}(\alpha))_{\alpha\in I}$ est un isomorphisme d'espaces de Hilbert de E sur $l^2_{\mathbb{K}}(I)$. □

Théorème 4.2.6. *Soit E un Hilbert non réduit à $\{0\}$ et soient*

$$\{x_\alpha; \alpha \in I\}, \{y_\beta; \beta \in J\}$$

deux bases orthonormées de E. Alors

$$card\, I = Card\, J$$

Définition 4.2.3. *On appelle dimension hilbertienne de E le cardinal d'une base orthonormée de E si $E \neq \{0\}$, le cardinal 0 si $E = \{0\}$.*

Démonstration du théorème 4.2.6. Soit $\beta \in J$. On pose

$$I_\beta = \{\alpha \in I; \hat{y}_\beta(\alpha) \neq 0\}.$$

On a $I = \bigcup\limits_{\beta\in J} I_\beta$ en effet, supposons $\exists\alpha \in I$ tel que $\alpha \notin \bigcup_{\beta\in J} I_\beta$. Alors $\hat{y}_\beta(\alpha) = 0$ pour tout $\beta \in J$, i.e. que x_α est orthogonal à tous les vecteurs $y_\beta, \beta \in J$, ce qui est impossible.

· Supposons que card I et card J ne soient pas finis.

Puisque $\sum_{\alpha\in I} |\hat{y}_\beta(\alpha)|^2 < +\infty$, on a

$$card\, I_\beta \leq card\, \mathbb{N}$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Puisque } I = \bigcup_{\beta\in J} I_\beta, \text{ on a } card\, I \leq (card\, \mathbb{N})(card\, J) = card\, J \\ \text{En échangeant les rôles de } I \text{ et } J \text{ on a } card\, J \leq card\, I \end{array}\right\} \Longrightarrow card\, I = card\, J$$

· Supposons que l'un des ensembles I ou J soit fini ; par exemple $card\, I < +\infty$

Alors E est de dimension finie - Les vecteurs $\{y_\beta; \beta \in J\}$ forment une famille libre de E donc

$$card\, J \leq card\, I.$$

A fortiori $card\ J < +\infty$ et de la même façon, on aura

$$card\, I \leq card\, J.$$

D'où l'égalité. □

Théorème 4.2.7. *Soit E un Hilbert. Alors E est séparable $\Longleftrightarrow$ sa dimension hilbertienne est finie ou égale à $card\,\mathbb{N}$.*

Rappel. Définition :

Un espace topologique E est séparable s'il contient un sous-ensemble dénombrable, partout dense.

Démonstration du théorème 4.2.7. $\Longrightarrow$ Soit $\{x_n; n \in \mathbb{N}\}$ une suite partout dense dans E. Soit $\{y_\alpha; \alpha \in I\}$ une base orthonormée de E. Pour tout

$$\alpha \in I, \quad \exists n(\alpha) \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left\|x_{n(\alpha)} - y_\alpha\right\| \leq \frac{1}{2}.$$

Soient

$$\alpha, \beta \in I, \alpha \neq \beta.$$

Supposons que

$$x_{n(\alpha)} = x_{n(\beta)}.$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{Alors } \|y_\alpha - y_\beta\| \leq \left\|y_\alpha - x_{n(\alpha)}\right\| + \left\|x_{n(\beta)} - y_\beta\right\| \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \\ \text{or } \|y_\alpha - y_\beta\| = \sqrt{2} \quad \text{(base orthonormée)} \end{array}\right\} \Longrightarrow \text{contradiction}$$

Donc l'application

$$\left|\begin{array}{l} I \longrightarrow \mathbb{N} \\ \alpha \rightsquigarrow n(\alpha) \end{array}\right. \text{ est injective et donc } card\ I\ card\,\mathbb{N}$$

$\Longleftarrow$ Supposons $card\,I \leq card\,\mathbb{N}$. Définissons $\mathbb{L} \subset \mathbb{K}$ par ($\mathbb{L} = \xi$ rationnels de Gauss ξ) $\left|\begin{array}{l} \mathbb{L} = \mathbb{Q} \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{R} \\ \mathbb{L} = \mathbb{Q} + \mathbb{Q} \text{ si } \mathbb{K} = \mathbb{C} \end{array}\right.$

Alors l'ensemble des combinaisons linéaires

$$a_1 y_{\alpha_1} + ... + a_n y_{\alpha_n}, \; n \in \mathbb{N}, a_i \in \mathbb{L}$$

est un sous ensemble dénombrable dense de E.

D'après (c) du Théo C, tout $x \in E$ s'écrit

$$x = \sum_{\alpha \in I} (x, y_\alpha)\, y_\alpha = \sum_{\alpha \in I} \hat{x}(\alpha)\, y_\alpha.$$

Alors

$$\forall \varepsilon > 0, \; \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left\|x - \sum_{i=1}^n \hat{x}(\alpha_i)\, y_{\alpha_i}\right\| < \varepsilon$$

donc

$$\begin{aligned} \forall \varepsilon' > 0, \; \exists n \in \mathbb{N} \text{ tel que } \left\|x - \sum_{i=1}^n a_i y_{\alpha_i}\right\| &\leq \left\|x - \textstyle\sum_{i=1}^n \hat{x}(\alpha_i)\, y_{\alpha_i}\right\| + \left\|\textstyle\sum_{i=1}^n (\hat{x}(\alpha_i) - a_i)\, y_{\alpha_i}\right\| \\ &\leq \varepsilon + \textstyle\sum_{i=1}^n |\hat{x}(\alpha_i) - a_i| \left\|\underbrace{y_{\alpha_i}}_{=1}\right\| = \varepsilon + \varepsilon_1 + \cdot + \varepsilon_n \end{aligned}$$

□

4.3 Exemples

1) Soit L_2 l'espace de Hilbert associé à l'espace mesuré $[0, 2\pi]$, la mesure étant celle de Lebesgue et les intégrales étant de Lebesgue, constitué des fonctions complexes définies sur $[0, 2\pi]$ qui sont Lebesgue -mesurables et de carré intégrable.

On définit

$$\|f\| = \left(\int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} \quad \text{et} \quad (f, g) = \int_0^{2\pi} f(x) \, \overline{g(x)} \, dx.$$

· Un calcul simple montre que les fonctions $e^{in\,x}$, $n \in \mathbb{Z}$, sont mutuellement orthogonales dans L_2 :

$$\int_0^{2\pi} e^{im\,x} e^{-in\,x} dx = \begin{cases} 0 \, m \neq n \\ 2\pi \, m = n \end{cases} .$$

Donc les fonctions

$$e_n(x) = \frac{e^{in\,x}}{\sqrt{2\pi}}$$

forment un système orthonormal dans L_2.

· $\forall \, f \in L_2$, les nombres

$$c_n = (f, e_n) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{2\pi} f(x) \, e^{-in\,x} dx$$

sont les coefficients de Janvier de f et

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 \leq \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx$$

est l'inégalité de Bessel.

· $\{e_n\}$ est complet dans L_2 (voir théorie des séries de Fourier).

· Cette affirmation est éqsuivalente (voir le théorème C) à l'égalité de Parseval :

$$\|f\|^2 = \int_0^{2\pi} |f(x)|^2 \, dx = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 .$$

· Le théorème C affirme aussi que en est complet $\Longleftrightarrow$ f est développable en série de Fourier :

$$(*) \qquad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{in\,x}$$

↑ Ce développement ne doit pas être interprêté en disant que la série converge simplement (ou ponctuellement) vers la fonction f. Le sens de $(*)$ est que les sommes partielles de la série, i.e. les vecteurs $f_n \in L_2$ définis par

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathop{}_{k=-n}^{+n} c_k e^{ik\,x},$$

convergent vers f au sens de $L2$:

$$\|f_n - f\| \longrightarrow 0$$

(on dit que f est limite en moyenne quadratique des f_n).

· Si $f \in L_2$, avec des coefficients de Fourier $c_n = (f, e_n)$, alors l'inégalité de Bessel nous dit que la série $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ converge.

Le théorème de Tiesz - Fischer affirme la réciproque : "Si $c_n, n \in \mathbb{Z}$, sont des nombres complexes tel que $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ converges alors $\exists\ f \in L_2$ dont les coefficients de Fourier sont les c_n".

(ou encore = on définit

$$f_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{|k|=n+1}^{n} c_k e^{ik\,x}.$$

Les $\frac{e^{ik\,x}}{\sqrt{2\pi}}$ formant un système orthonormal, autre méthodes (en sanchant que L_2 est complet). On a

$$(\text{pour } m > n) : \|f_m - f_n\|^2 = \sum_{|k|=n+1}^{n} |c_k|^2 < \varepsilon$$

(en vertu de la convergence de $\sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$ pour m et n suffisamment grands). Donc $\{f_n\}$ est s. de C. dans L_2 donc

$$\exists f \in L_2, f_n \longrightarrow f.$$

f est donnée par $*$ et les cn sont évidemment ses coefficients de Fourier.

2) - Procédé d'orthonormalisation de Gram - Schmidt.

Supposons que

$$\{x_1, x_2, ..., x_n, ...\}$$

est un système linéairement indépendant dans un Hilbert E.

Question :

Déduire un ensemble orthonormé

$$\{e_1, e_2, ..., e_n, ...\}$$

tel que, pour tout n, le s.e.v. de E engendré par

$$\{e_1, e_2, ...e_n\}$$

soit le même que celui engendré par

$$\{x_1, x_2, ..., x_n\}$$

$$e_1 = \frac{x_1}{\|x_1\|}, \quad e_2 = \frac{x_2 - (x_2, e_1)\,e_1}{\|x_2 - (x_2 - e_1)\,e_1\| \longleftarrow \neq 0 \text{ car } x_2 \neq \lambda x_1}$$

(on retire à x_2 sa composante dans la direction de e_1 donc on obtient un vecteur $\perp$ à e_1).

$$e_3 = \frac{x_3 - x_3, e_1 - x_3, e_2 e_2}{\|x_3 - (x_3, e_1)\,e_1 - (x_3, e_2)\,e_2\|},$$

etc...

$\Longrightarrow$ De nombreux ensembles orthonormés de grande importance, peuvent être obtenus en appliquant le procédé de Gram - Schmidt à des suites de fonctions simples :

a) Dans $L_2[-1,1]$, les fonctions x^n $(n=0,1,2,...)$ sont linéairement indépendantes. Par G S, on leur associez les en appelés polynômes de Legendre (normalisés).
b) Dans $L_2(\mathbb{R})$, si on choisit les x_n définis par

$$x^n e^{-\frac{x^3}{2}} \,(n=0,1,2,...)\,,$$

alors les en correspondants sont les fonctions de Hermite (normalisées).
c) Dans $L_2[0,\infty]$, si les x_n sont les fonctions

$$x^n e^{-x} \,(n=0,1,2,...)\,,$$

alors les en sont les fonctions de Laguerre (normalisées).

Chapitre 5

Opérateurs Linéaires

Sommaire

5.1 Définitions

La formulation mathématique de la Mécanique Quantique rend indispensable l'étude des opérateurs linéaires définis dans un espace de Hilbert. Lorsque ces opérateurs sont continues, (bornés) leur manipulation n'offre pas de difficulté majeure, mais dans le cas contraire, il faut être d'une extrême prudence, car le domaine de définition de l'opérateur joue alors un rôle très important. Ce fait n'ayant pas d'analogue en algèbre linéaire, les opérateurs linéaires définis sur un espace de dimension finie étant nécessairement continus, il faut se garder de toute généralisation hâtive.

Définition 5.1.1. *Soient E, F deux Banach. On appelle opérateur linéaire de E dans F, toute application linéaire*

$$A : D_A \subset E \longrightarrow F$$

définie sur un s.e.v. $D_A \subset E$, à valeur dans F.

· A est dit borné si $\exists c \geq 0$ tel que

$$\|A\,x\| \leq c\,\|x\|\,, \quad \forall x \in D_A.$$

· Notations :

$$\begin{aligned} D_A &= \text{domaine de } A \\ G_A &= \bigcup_{x\in D_A} (x, Ax) \subset E \times F = \text{Graphe de } A \\ R_A &= \bigcup_{x\in D_A} Ax \subset F = \text{Image de } A \\ N_A &= \{x \in D_A; Ax = 0\} \subset E = \text{Noyau de } A = Ker\, A \end{aligned}$$

· A est dit fermé si G_A est fermé dans $E \times F$. (Alors, N_A est formé).

Définition de l'adjoint A' (ou A*) :

Soit

$$A : D_A \subset E \longrightarrow F$$

un opérateur à domaine dense (dans E).

On va définir un opérateur

$$A^* : D_{A^*} \subset F' \longrightarrow E'$$

comme suit :

On pose

$$D_{A^*} = \{y \in F';\ \exists c \geq 0 \text{ tel que } |y\,(Ax)| \leq c\,\|x\| \quad \forall x \in D_A\}.$$

Il est clair que D_{A^*} est un s.e.v de F'. On va définir A^*y pour $y \in D_{A^*}$:

Etant donné $y \in D_{A^*}$ on considère l'application $g : D_A \longrightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$g\,(x) = y\,(Ax) \quad x \in D_A$$

grâce au théorème de Hahn - Banach (forme analytique) on sait que g peut être prolongée en une application linéaire $f : E \longrightarrow \mathbb{R}$ tel que

$$|f\,(x)| \leq c\,\|x\| \quad \forall x \in E.$$

Par suite $f \in E'$. On remarquera que le prolongement de g est unique puisque f est continue sur E et que D_A est dense.

On pose

$$A^*y = f.$$

Il est clair que A^* est linéaire. L'opérateur

$$A^* : D\,(A^*) \subset F' \longrightarrow E'$$

est appelé l'adjoint de A.

On a, pour conséquent, la relation fondamentale qui lie A et A^* :

$$y\,(Ax) = (A^*y)\,(x) \quad \forall x \in D_A, \quad \forall y \in D_{A^*}$$

Reprenant la notation du §6, on peut écrire

$$\langle y, Ax\rangle_{F',F} = \langle A^*y, x\rangle_{F',E} \qquad \forall x \in D_A, \qquad \forall y \in D_{A^*}$$

Remarque 5.1.1. *Il n'est pas nécessaire de faire appel au théorème de H-B pour prolonger g. Il suffit d'utiliser le prolongement "par continuité" de g puisque D_A est dense. (g est uniformément continue et $\mathbb{K}$ est complet)*

Rappel :

Soient E, F deux espaces métriques, A un sous-ensemble dense de X, F complet, et $f : A \longrightarrow F$ uniformement continue sur A. Alors f se prolonge de façon unique en une application continue $\tilde{f} : E \longrightarrow F$ uniformément continue sur X (A muni de la métrique induite).

Théorème 5.1.1. *Soit $A : D_A \subset E \longrightarrow F$ un opérateur à domaine dense.*

Alors A^* est fermé (i.e. G_{A^*} est fermé dans $F' \times E'$.

Démonstration. Soit $y_n \in D_{A^*}$ tel que $y_n \longrightarrow y$ dans F' et $A^*y_n \longrightarrow f$ dans E'.

Il s'agit de prouver que
$$y \in D_{A^*} \text{ et } A^*y = f.$$

Or, on a
$$\langle y_n,\ Ax\rangle = \langle A^*y_n, x\rangle \qquad \forall x \in D_A.$$

D'où, à la limite
$$\langle y_n,\ Ax\rangle = \langle f, x\rangle \qquad \forall x \in D_A.$$

Par conséquent $y \in D_{A^*}$ (d'après la définition de D_{A^*}) et $A^*y = f$. □

Remarque 5.1.2. *Les graphes de A et A^* sont liés par une relation d'orthogonalité très simple.*

Considérons l'application.

$$\underline{J : F' \times E' \longrightarrow E' \times F' \text{ définie par } J\left((y, f)\right) = (-f, y)}.$$

Soit
$$A : D_A \subset E \longrightarrow F \text{ avec } \overline{D_A} = E, \text{ alors } \underline{J\left(G_{A^*}\right) = G_A}^{\perp}.$$

<u>En effet</u> : Soit $(y, f) \in F' \times E'$. Alors

$$(y, f) \in G_{A^*} \Longleftrightarrow \langle f, x\rangle = \langle y, Ax\rangle \qquad \forall x \in D_A \Longleftrightarrow -\langle f, x\rangle + \langle y, Ax\rangle = 0$$
$$\forall x \in D_A \Longleftrightarrow (-f, y) \in G_A^{\perp}.$$

Dans le cas des Hilbert, le théorème de Riesz - Fréchet permet une définition aisée de A^*.

Soit E un Hilbert sur $\mathbb{K}$ et soit $A : D_A \in E \longrightarrow E$ tel que $\overline{D_A} = E$. Soit D_{A^*} le s.e.v. des $y \in E$ tel $x \rightsquigarrow \langle Ax, y\rangle$

de D_A dans $\mathbb{K}$ soit continue.

Soit u l'unique élément de E' prolongeant cette application (voir la remarque - page antérieure).

On note A^*y l'unique élément de E tel que

$$u\left(x\right) = \langle x, A^*y\rangle \qquad \forall x \in E$$

(Théo §9.E).

L'application $y \rightsquigarrow A^*y$ de D_{A^*} dans E est linéaire.

L'opérateur A^* de D_{A^*} dans E ainsi défini est dit <u>opérateur adjoint de A</u>.

<u>Pour les physiciens (et les mathématiciens qui ont tout oublié !)</u>

Le fait que, pour chaque opérateur linéaire, il faille préciser à chaque fois son domaine, est une source de complications qu'il est possible d'éviter dans le cas des opérateurs linéaires bornés.

En effet, nous allons montrer qu'il est toujours possible de supposer que le domaine coïncide avec l'espace tout entier.

Théorème 5.1.2. *Si A est un opérateur linéaire <u>borné</u> dans un <u>Hilbert</u> E, de domaine D_A, il existe un opérateur linéaire borné $\tilde{A}$ dont le domaine est E tout entier et qui est tel que*
$$\tilde{A}x = Ax, \qquad \forall x \in D_{\tilde{A}} \text{ et } \left\|\tilde{A}\right\| = \|A\|.$$

Démonstration. · <u>Commençons par étendre A de D_A à $\overline{D_A}$</u>: $\forall x \overline{D_A}$, $\exists \{x_n\}$ dans D_A tel que $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$.

A étant borné, on a

$$\|Ax_p - Ax_q\| \leq \|A\| \, \|x_p - x_q\|$$

et donc $\{Ax_n\}$ est s de C.

Définissons l'extension A' de A en posant $A'x = \lim\limits_{n\to\infty} Ax_n$ (on vérifie facilement que A' ne dépend pas de

la suite $\{x_n\}$ choisie pour approcher x).

La linéarité de A est conséquence de celle de A.

$$\left.\begin{array}{l} \|A'x\| = \|\lim Ax_n\| = \|A \lim x_n\| \leq \|A\| \, \|x\| \text{ et donc } \|A'\| \leq \|A\| \\ \text{Mais } A' \text{ étant extension de } A\text{, on a } \|A'\| \geq A \end{array}\right\} \Longrightarrow \|A\| = \|A'\|$$

· L'extension de A' de $\overline{D_A}$ à E tout entier se fait aisément : En effet, E étant un Hilbert, il en est de même de $\overline{D_A}$ (fermé $\subset$ complet) et on peut écrire $E = \overline{D_A} + \overline{D_A}^{\perp}$ (Théo §9.D).

On pose

$$\tilde{A}\,x = \left| \begin{array}{l} A'x \text{ si } x \in \overline{D_A} \\ 0 \text{ si } x \in \overline{D_A}^{\perp} \end{array} \right. \text{.Tout } xE \text{ s'écrit } x = x1 + x2 \text{ où } \begin{array}{c} x_1 \in D_A \\ x_2 \in \overline{D_A}^{\perp} \end{array}$$

et en vertu de la linarité de A' on a

$$\tilde{A}x = A'x_1 \qquad \forall x \in E.$$

· <u>De plus</u>

$$\sup_{\|x\|=1} \left\|\tilde{A}x\right\| = \sup_{\|x\|=1} \|A'x_1\| \quad \text{i.e.} \quad \left\|\tilde{A}\right\| = \|A'\| = \|A\| \,.$$

□

Théorème 5.1.3. *Etant donné un opérateur linéaire <u>borné</u> A sur un Hilbert E, il existe un opérateur linéaire <u>borné</u> A^* et un seul, appelé <u>adjoint de A</u>, tel que*

$$\langle y, Ax \rangle = \langle A^* y, x \rangle \qquad \forall x, y \in E.$$

A et A^* ont même norme.

Démonstration. L'existence de A^* résulte de la sesquilinéarité de la forme $\langle y, Ax \rangle$:

En vertu du 2$^{\text{ème}}$ théorème de Riesz (§9.I) on a

$$\langle y, Ax \rangle = \langle A^* y, x \rangle \qquad \forall \underset{y}{x} \in E.$$

En vertu de l'inégalité de C-Sch, et du fait que A est borné, on a :

$$|\langle y, Ax \rangle| \leq \|A\| \, \|x\| \, \|y\|$$

ce qui entraîne

$$|\langle A^* y, x \rangle| \leq \|A\| \, \|x\| \, \|y\|$$

et donc A^* est borné. Sa norme est égale à celle de A, c'est presque évident. L'unicité de A^* est évidente (revoir théorème §9.I). □

Remarque 5.1.3. *Si A n'est pas borné, on a donc défini A^* par*

$$\langle y, Ax\rangle = \langle A^* y, x\rangle \qquad \forall x \in D_A \text{ et } y \in D_{A^*}.$$

L'application $x \rightsquigarrow \langle A^* y, x\rangle$ étant continue dès que $A^* y$ est défini, le domaine D_{A^*} de A^* sera donc l'ensemble des vecteurs y de E tel que l'application $x \rightsquigarrow \langle y, Ax\rangle$ soit continue.

Toutefois, si D_A est quelconque, $A^* y$ n'est pas défini de façon unique par la formule précédente car, si x_0 est orthogonal à D_A, on a :

$$\langle A^* y + x_0, x\rangle = \langle A^* y, x\rangle \qquad \forall x \in D_A.$$

Afin d'éviter cet inconvénient il faut, pour pouvoir définir A^*, que le seul vecteur orthogonal à D_A soit 0 ; ou encore, que $\overline{D_A} = E$.

On commet souvent l'abus d'identifier un Hilbert E avec son dual E'. On peut alors considérer que A^* est défini dans E.

Définition 5.1.2. *Soit E un Hilbert. Un opérateur $A : D_A \subset E \longrightarrow E$, linéaire non borné avec $\overline{D_A} = E$ est dit*

- *Symétrique si*
$$\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle \qquad \forall \underset{y}{x} \in D_A$$
- *Autoadjoint (= hermitien) si $A = A^*$ (ce qui sous-entend $D_A = D_{A^*}$)*

Remarque 5.1.4. · *Quand $A \in L(E)$ il n'y a pas lieu de distinguer entre symétrique et autoadjoint.*

· *Quand A est non borné, il est clair que : autoadjoint $\Longrightarrow$ symétrique. La réciproque n'est pas vraie : Si A est symétrique on a $A < A^*$ (ce qui sous entend (il peut arriver que $A \subsetneqq A^*$) $D_A \subset D_{A^*}$ et $A^* = A$ sur D_A)*

Définition 5.1.3. *Soit E un Hilbert. Un opérateur $A : D_A \subset E \longrightarrow E$ linéaire non borné avec $\overline{D_A} = E$ est dit*

- *Normal si $A^* A = AA^*$ et si A est fermé*
- *Unitaire si $A^* A = AA^* = I$ et si A est fermé.*

5.2 Théorie spectrale

Etant donné un opérateur linéaire A défini dans un Hilbert E, nous allons étudier les propriétés de l'opérateur $A - \lambda I$ où $\lambda \in \mathbb{C}$ et I est l'opérateur identité. $\forall \lambda$, on a $D_{A-\lambda I} = D_A$.

L'inverse de $A - \lambda I$, quand il existe, est appelé opérateur résolvant ou résolvante de A. On le note

$$R_\lambda(A) = (A - \lambda I)^{-1}.$$

L'étude de $R_\lambda(A)$ simplifie considérablement celle de A.

L'objet de la théorie spectrale est l'étude des propriétés de $R_\lambda(A)$ en tant que fonction de λ définie dans $\mathbb{C}$ et à valeurs dans l'ensemble des opérateurs linéaires dans E.

Définition 5.2.1. *On appelle ensemble résolvant $\rho(A)$ de l'opérateur linéaire A, l'ensemble des valeurs de λ telles que $R_\lambda(A)$ existe, soit borné et à domaine dense. On appelle spectre $\sigma(A)$ de A, le complémentaire de $\rho(A)$.*

Définition 5.2.2. · *L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles $R_\lambda(A)$ n'existe pas est appelé le spectre ponctuel (ou discret). On le note $\sigma_p(A)$*

· *L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles $R_\lambda(A)$ existe, est à domaine dense mais n'est pas borné est appelé le spectre continu de A. On le note $\sigma_c(A)$.*

· *L'ensemble des valeurs de λ pour lesquelles $R_\lambda(A)$ existe, mais n'est pas à domaine dense est appelé le spectre résiduel de A. On le note $\sigma_r(A)$.*

· *Les éléments du spectre ponctuel sont appelés les valeurs propres de A.*

· *Il est clair que certains des spectres que nous venons de définir peuvent être vides. Par exemple, lorsque l'opérateur A est défini sur un Hilbert de dimension finie, il a, uniquement, un spectre ponctuel. La terminologie n'est pas parfaite. Le spectre ponctuel n'est pas nécessairement dénombrable. Quant au spectre continu, il peut être dénombrable et même fini.*

· *Si λ est valeur propre de A, le noyau de $A-\lambda I$ n'est pas $\{0\}$; ou encore l'équation $Ax = \lambda x$ a une solution $x \neq 0$. Une telle solution est appelée vecteur propre* de A *associé à λ.*

· *Si x_1 est un vecteur propre associé à λ_1 et x_2 un vecteur propre associé à λ_2, x_1 et x_2 sont linéairement indépendants si $\lambda_1 \neq \lambda_2$. Ce résultat s'étend à tout ensemble dénombrable de vecteurs propres associés à un ensemble dénombrable de valeurs propres .*

Il peut arriver qu'à 1 valeur propre soient associés plusieurs vecteurs propres linéairement indépendants. On dit alors que la valeur propre est dégnérée. Dans le cas contraire, elle est dite non dégnénérée ou simple.

Exemple :

Soit P un opérateur de projection défini sur un Hilbert E. Nous allons montrer que le spectre de P est discret et qu'il ne comporte que 2 valeurs propres : 0 et 1.

Si $x \in E$, on l'écrit

$$x = x_1 + x_2 \text{ où } x_1 \in R_P \text{ et } x_2 \in R_P^\perp.$$

L'oprérateur $P - \lambda I$ a un inverse si l'équation $(P - \lambda I)\, x = 0$ n'admet que la solution $x = 0$.

Or

$$(P - \lambda I)\, x = x_1 - \lambda x_1 - \lambda x_2.$$

Ce qui montre que, si $x \neq 0$ est solution de l'équation précédente, on doit avoir.

- Soit $\lambda = 0$ et alors $x_1 = 0$ et donc $x \in R_P^\perp$
- Soit $\lambda = 1$ et alors $x_2 = 0$ et donc $x \in R_P$.

0 et 1 sont donc les seules valeurs propres de P et si, comme c'est souvent le cas,

$$\dim R_P \text{ et } \dim R_P$$

sont différentes de 1, elles sont toutes deux dégnérées.

Pour montrer que le spectre continu et le spectre résiduel de P sont vides, il faut montrer que si λ est différent de 0 ou 1, l'opérateur $(P - \lambda I)^{-1}$ est borné et à domaine dense.

Or - le domaine de $(P - \lambda I)^{-1}$ est E tout entier

- si $x \in E$, on a

$$(P - \lambda I)^{-1} x = \frac{x_1}{1-\lambda} - \frac{x_2}{\lambda} \text{ où } \left| \begin{array}{l} x_1 \in R_P \\ x_2 \in R_P^\perp \end{array} \right.$$

D'où

$$\frac{\left\|(P-\lambda I)^{-1}x\right\|}{\|x\|} \leq \frac{\dfrac{\|x_1\|}{|1-\lambda|}+\dfrac{\|x_2\|}{\lambda}}{\left(\|x_1\|^2,\|x_.\|^2\right)^{1/2}}.$$

Théorème 5.2.1. *Soit A un opérateur linéaire défini dans un Hilbert E. Alors*

(1) $\sigma(A)$ est ouvert.

(2) La fonction $\lambda \rightsquigarrow R_\lambda(A)$ est analytique pour tout $\lambda \in \rho(A)$

(3) $\sigma(A)$ fermé et non vide.

Démonstration. (1) Si $\lambda_0 \in P(A)$, l'opérateur résolvant $R_{\lambda_0}(A)$ existe, est borné et à domaine dense.

Montrons que il existe une boule ouverte de rayon r centrée en λ_0 et telle que, pour tout λ appartenant à cette boule, l'opérateur $R_\lambda(A)$ existe, est borné et à domaine dense.

En effet, si la série

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1}(A)$$

converge, elle définit, en vertu du lemme §5.3, un opérateur borné dont le domaine coïncide avec celui de $R_{\lambda_0}(A)$ et qui, par conséquent, est dense. Or cette série converge si

$$|\lambda-\lambda_0| < \|R_{\lambda_0}(A)\|^{-1} = r$$

et, dans ce cas, sa somme est égale à

$$\frac{R_{\lambda_0}(A)}{I-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(A)}$$

qui n'est autre que $R_\lambda(A)$ car

$$[R_\lambda(A)]^{-1} = A-\lambda I = (A-\lambda_0 I)-(\lambda-\lambda_0)I$$

$$= [I-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(A)](A-\lambda_0 I) = [I-(\lambda-\lambda_0)R_{\lambda_0}(A)][R_{\lambda_0}(A)]^{-1}.$$

(2) La formule

$$R_\lambda(A) = \sum_{n=0}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^n R_{\lambda_0}^{n+1}(A)$$

montre que la fonction $\lambda \rightsquigarrow R_\lambda(A)$, définie pour tout $\lambda \in \rho(A)$ et à valeurs dans $L(E)$, est analytique et que, en particulier, la dérivée de cette fonction au point λ_0 est égale à $R_{\lambda_0}^2(A)$.

□

Remarque 5.2.1. *Ce résultat aurait pu, aussi, être obtenu comme conséquence de la relation de Hilbert*

$$R_\lambda(A)-R_\mu(A) = (\lambda-\mu)R_\lambda(A)R_\mu(A), \qquad \forall\lambda,\mu \in P(A).$$

Car cette relation implique, en effet, que la limite

$$\lim_{\triangle\lambda\longrightarrow 0}\frac{R_{\lambda_0+\triangle\lambda}(A)-R_{\lambda_0}(A)}{\triangle\lambda}$$

qui est, par définition, la dérivée de $R_\lambda(A)$ en λ_0 est égale à $R^2_{\lambda_0}(A)$.

La relation de HIlbert qui s'établit facilement, en remarquant que :

$$R_\lambda(A) - R_\mu(A) = R_\lambda(A)[A-\mu I]R_\mu(A) - R_\lambda(A)[A-\lambda I]R_\mu(A)$$

montre, en outre, que $R_\lambda(A)$ et $R_\mu(A)$ commutent.

(3) $\sigma(A)$ est fermé puisque c'est par définition le complémentaire de $P(A)$.

$\sigma(A)$ n'est pas vide car alors $\lambda \rightsquigarrow R_\lambda(A)$ serait analytique dans tout le plan complexe et donc, en vertu du théorème de Liouville serait constante, ce qui n'est pas.*

Théorème 5.2.2. *Soit A un opérateur autoadjoint défini dans un Hilbert E. Alors*

(1) Ses valeurs propres sont réelles.

(2) Les vecteurs propres associés à des valeurs propres $\neq$ sont orthogonaux.

(3) Son spectre résiduel est vide.

(4) Son spectre continu est réels.

Démonstration. (1) Résulte de

$$\langle x, Ax\rangle = \langle Ax, x\rangle = \overline{\langle x, Ax\rangle}.$$

(2) Si x_1 est un vecteur propre associés à $1_\lambda, x_2$ vecteur propre associé à λ_2, on a :

$$(\lambda_1 - \lambda_2)\langle x_1, x_2\rangle = \langle Ax_1, x_2\rangle - \langle x_1, Ax_2\rangle = 0.$$

D'où

$$\langle x_1, x_2\rangle = 0$$

(3) Si $\lambda \in \mathbb{C}$, l'équation $Ax - \lambda x = y$ a pour solution $x = R_\lambda(A)y$

$\langle x, Ax\rangle$ étant réel, la relation

$$\langle x, Ax\rangle - \lambda\|x\|^2 = \langle x, y\rangle$$

(obtenue en multipliant par x les 2 membres de l'équation) implique

$$|\Im m\lambda|\,\|x\|^2 = |\Im m\langle x, y\rangle| \le |\langle x, y\rangle| \le \|x\|\,\|y\|.$$

□

Théorème 5.2.3 (de Liouville)**.** *Une fonction $f(z)$ analytique dans $\mathbb{C}$ (i.e. entière) et bornée dans $\mathbb{C}$ est constante.*

Démonstration.

$$f(z) = \sum_{n\ge 0} a_n z^n = \sum_{n\ge 0} a_n r^n e^{in\theta} \Longrightarrow a_n r^n \frac{-1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-in\theta} f^{(rei\theta)} d\theta \Longrightarrow |a_n| < \frac{M}{q^{d^{r^n}} n \to \infty} \longrightarrow 0.$$

et donc $f(z) = a_0$.

ou encore

$$\|x\| = \|R_\lambda(A)y\| \le \frac{\|y\|}{|\Im m\lambda\|},$$

ce qui montre que $R_\lambda(A)$ est borné.

Si donc $\Im m\lambda \neq 0$, λ appartient soit à $p(A)$, soit à $\sigma_r(A)$.

Il appartient en réalité à $p(A)$ car la relation$^{\oplus}$

$$\bar{D}_{R_\lambda}(A) = \bar{R}_{A-\lambda I} = \left[Ker\left(A - \bar{\lambda} I\right)\right]^{\perp}$$

montre que $\bar{D}_{R_\lambda}(A) = E$ car $\bar{\lambda}$ n'étant pas, par hypothèse, valeur propre de A, on a

$$Ker\left(A - \bar{\lambda} I\right) = \{0\}.$$

$\oplus$ La relation

$$\langle y, Ax\rangle = \langle A^* y, x\rangle$$

qui définit A^* montre que si

$$x \in Ker\, A, \langle A^* y, x\rangle = 0$$

et donc

$$Ker\, A = (R_{A^*})^{\perp} -$$

De même si

$$y \in Ker\, A^*, \langle y, Ax\rangle = 0$$

et donc $y \in R_A^{\perp}$.

D'où $\overline{R_A} = [Ker\, A^*]^{\perp}$. Pour obtenir $\oplus$, il suffit de remplacer A^* par $A - \bar{\lambda} I$.

(4) La démonstration précédente a permis d'établir que si $\mathfrak{Im}\,\lambda \neq 0$, alors $\lambda \in P(A)$.

On en déduit donc que le spectre de A nécessairement réel. □

· Ce théorème est important en Mécanique Quantique où toute observable (i.e. toute grandeur physique mesurable comme, par exemple, l'impulsion ou l'énergie d'une particule) est représentée par un opérateur linéaire autoadjoint.

Théorème 5.2.4. *Soit A un opérateur linéaire borné défini sur un Hilbert E. Alors*

(1) Son spectre $\sigma(A)$ est inclus dans un disque de rayon $\|A\|$, centré en 0.

(2) Son ensemble résolvant $p(A)$ n'est pas vide.

Démonstration. (1) La série de Laurent

$$R_\lambda(A) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{\lambda^{n+1}}$$

étant convergente pour tout λ tel que $|\lambda| > \|A\|$, on en déduit que le complémentaire du disque de rayon $\|A\|$ centré en 0 est inclus dans $p(A)$:

$$\left[B_{\|A\|}(0)\right]^c p(A)$$

et donc

$$B_{\|A\|}(0) \supset \sigma(A) = [p(A)]^c.$$

(2) $p(A) \neq \phi$ □

Définition 5.2.3. *On appelle rayon spectral d'un opérateur linéaire borné A, le nombre positif $r(A)$ déini par*

$$r(A) = \sup_{\lambda \in \sigma(A)} |\lambda|$$

- Bien évidemment $r(A) \leq \|A\|$.
- Si $\underline{A = A^*\text{,on a } r(A) = \|A\|}$ - en effet,

$$\left\|A^2\right\| = \sup_{\|x\|\leq 1} \left|\left\langle A^2 x, x\right\rangle\right| = \sup_{\|x\|\leq 1} \left|\langle Ax, Ax\rangle\right| = \|A\|$$

et, en appliquant la règle de Cauchy,

$$r(A) = \lim_{n\longrightarrow\infty} A^{2^n} \frac{1}{2^n} = \|A\|.$$

Théorème 5.2.5. *Soit A un opérateur linéaire autoadjoint borné défini sur un Hilbert E. On suppose que l'application*

$$x \rightsquigarrow |\langle Ax, x\rangle|$$

atteint son maximum, sur $\{x; \|x\| = 1\}$ pour $x = x_1$. Alors x_1 est un vecteur propre de A associé à la valeur propre λ_1 de plus grand module.

Démonstration. Soit

$$y \in E, \ \ y \perp x_1.$$

Soit

$$x = \frac{x_1 + \varepsilon y}{\sqrt{1 + |\varepsilon|^2 \|y\|^2}},$$

où $\varepsilon \in \mathbb{C}$

$$\langle Ax, x\rangle = \frac{1}{1 + |\varepsilon|^2 \|y\|^2} \left[\langle Ax_1, x_1\rangle + \varepsilon \langle Ax_1, y\rangle + \bar{\varepsilon} \langle Ay, x_1\rangle + |\varepsilon|^2 \langle Ay, y\rangle\right].$$

Si ε, que l'on peut choisir de module arbitrairement petit, est tel que $\varepsilon \langle Ax_1, y\rangle$ soit réel, on en déduit que

$$\bar{\varepsilon} \langle Ay, x_1\rangle = \bar{\varepsilon} \langle y, Ax_1\rangle = \overline{\varepsilon \langle Ax_1, y\rangle}$$

est aussi réel et, au premier ordre en ε, on a

$$\langle Ax, x\rangle = \langle Ax_1, x_1\rangle + 2\varepsilon \langle Ax_1, y\rangle.$$

ce qui montre qu'on pourrait choisir ε tel que

$$|\langle Ax, x\rangle| > \langle Ax_1, x_1\rangle,$$

contrairement à l'hypothèse. Par conséquent, pour tout $y \in E$, orthogonal à x_1, on a

$$\langle Ax_1, y\rangle = 0. \ \text{ i.e. } \ Ax_1 = \lambda_1 x_1 \text{ où } \lambda_1 \in \mathbb{R}.$$

En outre, comme

$$\langle Ax_1, x_1\rangle = |\lambda_1| \|x_1\|^2,$$

la valeur propre λ_1 est celle du plus grand module.

$\Longrightarrow$ Dans la pratique, ce théorème donne une méthode permettant de déterminer, de proche en proche, les valeurs propres $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_k, ...$ ordonnées par valeurs $\downarrow$ du module.

On détermine successivement les e.v.

$$E_1, E_2, ..., E_k, ...$$

en maximisant $|\langle Ax, x\rangle|$ où x est un vecteur normé qui appartient successivement à

$$E, E_1^{\perp}, E_2^{\perp}, ..., E_k^{\perp} \text{ où } E_k^{\perp}$$

est le supplémentaire orthogonal de

$$E_1 \oplus E_2 \oplus ... \oplus E_k.$$

La valeur du maximum de $|\langle Ax, x\rangle|$ lorsque $x \in E_{k-1}^{\perp}$, est égale à $|\lambda_k|$.

La valeur propre λ_k associée à l'ensemble des vecteurs propres engendrant E_k, est ensuite précisée en écrivant $\langle Ax, x\rangle = \lambda_k$ où x est un vecteur normé $\in E_k$. □

Définition 5.2.4. *Soient E, F deux Hilbert (ou deux Banach). On dit qu'un opérateur $A \in L(E, F)$ est compact si $A\left(B_1^E[0]\right)$ est relativement compact pour la topologie forte. On désigne par $\mathcal{K}(E, F)$ l'ensemble des opérateurs compacts et on pose*

$$\mathcal{K}(E) = \mathcal{K}(E, E).$$

Définition 5.2.5. *On dit qu'un opérateur $A \in L(E, F)$ est de rang fini si* $\dim R_A < \infty$.

Il est clair qu'un opérateur de rang fini compact.

Théorème 5.2.6. *Si A est un opérateur linéaire compact sur un Hilbert E et λ une valeur propre non nulle de A, l'espace vectoriel*

$$E_\lambda = Ker(A - \lambda I)$$

est de dimension finie.

Démonstration. Désignons par $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de vecteurs propres indépendants associés à la valeur propre λ et par E_n le s.e.v. de E_λ engendré par les vecteurs

$$x_1, x_2, ..., x_n.$$

Puisque

$$x_n \notin E_{n-1},\ \alpha = d(x_n, E_{n-1}) \neq 0.$$

Considérons $x \in E_{n-1}$ tel que $\|x_n - x\| < 2\alpha$, on a

$$d(x_n, E_{n-1}) = d(x_n - x, E_{n-1}).$$

Par conséquent, la suite $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\mathfrak{I}n = \frac{x_n - x}{\|x_n - x\|}$$

vérifie :

$$\|y_n\| = 1,\ \ y_n \in E_n \ \text{ et } d(y_n, E_{n-1}) \frac{> 1}{2}.$$

Par ailleurs, on a $\frac{1}{\lambda}Ay_n = y_n$ et donc

$$\left\| \frac{1}{\lambda}Ay_p - \frac{1}{\lambda}Ay_q \right\| = \|y_p - y_q\| > \frac{1}{2} \qquad \forall p \neq q.$$

Ce qui montre que si la suite bornée$^{\oplus}$ $\left(\dfrac{y_n}{\lambda}\right)$ était finie, il en serait de même de la suite image $\left(\dfrac{1}{\lambda}Ay_n\right)$ mais qu'il sderait impossible d'extraire de cette suite une sous-suite convergente. Or A est compact ; d'où une contradiction, et donc la suite (y_n) contient nécessairement un nombre fini de termes.

Ce nombre est égal à la dimension de E_λ.

$\oplus$ bornée car $\lambda \neq 0$. □

On déduit immédiatement de ce théorème :

Corollaire 5.2.1. *$\forall\varepsilon > 0$ l'e.v. $\underset{|\lambda|>\varepsilon}{\oplus} E_\lambda$ est de dimension finie.*

Corollaire 5.2.2. *$\forall\varepsilon > 0$ le nombre des valeurs propres de module $> \varepsilon$ est fini.*

Théorème 5.2.7. *Théorème spectral pour les opérateurs compacts autoadjoints*

Soit A un opérateur linéaire compact autoadjoint défini dans un Hilbert E et soit (λ_n) la suite, finie ou infinie, de ses valeurs propres. Alors

(1)

$$A = \sum_n \lambda_n P_{E_{\lambda_n}} \quad où \quad P_{E_{\lambda_n}}$$

est l'opéraeur de projection orthogonale sur l'espace de dimension finie

$$E_{\lambda_n} = Ker\,(A - \lambda_n I)$$

(2)

$$E = E_0 \underset{n}{\oplus} E_{\lambda_n} \quad où \quad E_0 = Ker\ A$$

Définition 5.2.6. *(1) est la représentation spectrale de A*

(2) est la décomposition spectrale de E.

Démonstration du théorème 5.2.7. Ce théorème est une conséquence des précédents.

· On détermine la suite (λ_n) des valeurs propres de A, de proche en proche, en appliquant théo D.

A la valeur propre λ_n est associé l'e.v. E_{λ_n} des vecteurs propres correspondants. En vertu du théorème E, cet espace est de dimension finie.

· Notons qui si $A \neq 0$, il possède au moins une valeur propre non nulle. Sinon, quel que soit le vecteur normé x de E, $|\langle Ax, x\rangle|$ serait nul, en contradiction avec l'hypo $A \neq 0$.

· Toutes les valeurs propres non nulles de A étant déterminées, considérons l'e.v. E_0 supplémentaire orthogonal de $\bigoplus_n E_{\lambda_n}$.

· Si $E_0 = \{0\}$, la duite (λ_n) est nécessairement infinie lorsque E est de dimension infinie et, en vertu du corollaire 2 du théo. E, on a $\lim_{n\longrightarrow\infty} \lambda_n = 0$.

· Si $E \neq \{0\}$, 0 est valeur propre et, lorsque la suite (λ_n) est infinie, 0 est point d'accumulation de cette suite. Si (λ_n) est finie, E_0 est nécessairement de dimension infinie lorsque E est de dimension infinie.

En résumé, dans tous les cas, on a $E = E_{0n}E_{\lambda_n}$ ou encore

$$x = x_0 + \sum_n x_n, \qquad \forall x \in E \quad \text{ou}$$

$$x_0 \in E_0,\, x_n \in E_{\lambda_n} \quad (n = 1, 2, ...)\,. \quad x_0 + \sum_n x_n$$

est la décomposition canonique de x. Cette décomposition est unique.

$$Ax = \sum_n \lambda_n \, x_n \quad \text{i.e.} \quad A = \sum_n \lambda_n P_{E_{\lambda_n}}.$$

- Ce théorème caractérise les opérateurs autoadjoints compacts. Leur spectre discret est dénombrable.

Si la suite (λ_n) est finie, 0 est nécessairement valeur propre.

Dans le cas contraire, 0 fait partie soit du spectre discret, soit du spectre continu.

On sait par ailleurs que le spectre résiduel d'un opérateur autoadjoint est vide (théo B).

L'ensemble des vecteurs propres est total dans l'espace final de A. Si ce système est complété par un système orthogonal total dans $Ker\, A$ on obtient un système orthogonal total dans E.

- Si A et B sont deux opérateurs compacts autoadjoints tel que $AB = BA$, ils ont même décompos spectrale. En effet, si $x_n \in E_{\lambda_n}$ on a

$$Ax_n = \lambda_n x_n \quad \text{et} \quad ABx_n = BAx_n = \lambda_n Bx_n$$

ce qui montre que $Bx_n \in E_{\lambda_n}$. □

Théorème 5.2.8. *Soit y un vecteur de E dont on connaît la décomposition canonique $y_0 + \sum_n y_n$.*

(1) Si λ n'est pas valeur propre de A, la solution unique de l'équation $Ax - \lambda x = y$ est donnée par sa décomposition canonique.

$$x = -\frac{1}{\lambda} y_0 + \sum_n \frac{1}{\lambda_n - \lambda} y_n$$

(2) Si λ est égal à une des valeurs propres λ_k de A, l'équation $Ax - \lambda x = y$ n'a de solution que si $y_k = 0$ et, dans ce cas, les solutions sont données par

$$x = -\frac{1}{\lambda_k} y_0 + \sum_{n \neq k} \frac{1}{\lambda_n - \lambda_k} y_n + x_k \quad \text{où} \quad x_k \in E_{\lambda_k}.$$

(3) Pour que l'équation $Ax = y$ ait une solution, il faut et il suffit que $y_0 = 0$ et que la série $\sum_n \frac{1}{\lambda_n^2} \|y_n\|^2$ soit convergente ; dans ce cas, les solutions sont données par

$$x = x_0 + \sum_n \frac{1}{\lambda_n} y_n \ \text{où}\ x_0 \in E_0.$$

Démonstration. Immédiate. Elle repose sur l'unicité de la décomposition canonique d'un vecteur de E. □

Les résultats (1) et (2) constituent l'alternative de Fredholm qu'on peut énoncer de façon + concise en disant : "Soit $A - \lambda I$ a un inverse, soit $Ax = \lambda x$ a une solution $x \neq 0$.

La grande majorité des opérateurs autoadjoints non bornés, qu'on rencontre en physique, sont des opérateurs différentiels.
Aussi nous ne chercherons pas à établir un théorème spectral plus général que le théorème F, s'appliquant à tout opérateur autoadjoint.

En effet on détermine le spectre d'un opérateur différentiel par des méthodes plus intéressantes (disributions tempérées et transformation de Fourier permettant de passer à un autre opérateur ayant le même spectre).

Nous énoncerons quand même ce théorème.

Théorème 5.2.9. *Théorème de décomposition spectrale d'un opérateur autoadjoint A de domaine D dans un Hilbert E :*

Il existe une unique famille de projecteurs orthogonaux $(\theta_\lambda)_{\lambda \in I}$ dans E tels que :

(1)

$$\theta_\lambda \theta_\mu = \theta_\mu \theta_\lambda \quad si \quad \lambda \leq \mu$$

(2)

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall x \in E \quad le\ vecteur \ \lim_{\substack{\mu \longrightarrow \lambda \\ \mu > \lambda}} \theta_\mu x \ existe$$

(3)

$$\forall x \in E, \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \theta_\lambda x = 0 \ et \lim_{\lambda \longrightarrow +\infty} \theta_\lambda x = x$$

(4)

$$\forall x \in D, \quad \forall y \in E, \quad \langle Ax, y \rangle = \int_{\mathbb{R}} \lambda d\left(\theta_\lambda x, y\right)$$

où $\int$ est de Stieltjes.

(5)

$$x \in D \Longleftrightarrow \int_{\mathbb{R}} \lambda^2 d\left(\theta_\lambda x, x\right) \quad existe$$

(6)

$$\forall x \in D, \ on\ a\ \theta_\lambda x \in D \ et \ A\theta_\lambda x = \theta_\lambda A x$$

(7)

$$\forall x \in E, \quad \forall \lambda, \mu \in R \ on\ a\ \theta_\lambda x - \theta_\mu x \in D.$$

Idée de la démonstration.

. Si nous définissons $\theta_{\lambda_0} = 0 \longleftarrow$ introduit pour les notations - (pas de signification)

$\theta_{\lambda_1} = P_{E_{\lambda_1}}$

$\theta_{\lambda_2} = P_{E_{\lambda_1}} + P_{E_{\lambda_2}}$

....

$\theta_{\lambda_m} = P_{E_{\lambda_1}} + P_{E_{\lambda_2}} + ... + P_{E_{\lambda_m}}$

....

Alors $A = \sum_i \lambda_i \left(\theta_{\lambda_i} - \theta_{\lambda_{i-1}}\right) = \sum_i \lambda_i \bigtriangleup E_{\lambda_i}$ ce qui suggère $A = \int \lambda dE_\lambda$.